Vérification et Validation

Année 2025-2026

https://usr.lmf.cnrs.fr/∼wolff/teach-material/2025-2026/ET4-VnV/

Prof. Burkhart Wolff
wolff@lmf.cnrs.fr

Prof. Uli Fahrenberg
uli@lmf.cnrs.fr

Preuve de programmes

Date : 29 fevrier 2026

Exercice 1

Dériver les triplets de Hoare suivants en utilisant les règles d'inférence introduites dans le cours. Rappel : toutes les variables sont des entiers.

1. $\vdash \{x \leq 0\}$ `y := x+2` $\{y \leq 2\}$
2. $\vdash \{x \leq 0\}$ `x := x-1` $\{x < 0\}$
3. $\vdash \{x \geq 0\}$ `WHILE x` $\geq$ `0 DO x := x-1` $\{x = -1\}$
4. $\vdash \{a = x \wedge b = y\}$ `a := a + b; b := a - 2*b; a := a * b` $\{a = x^2 - y^2\}$
5. $\vdash \{i = 8\}$ `WHILE i < 5 DO i := 2*i` $\{i \geq 5\}$

Exercice 2

On considère le programme `Prog` suivant :

```
IF x > y
THEN max := x
ELSE max := y
```

Quelles sont les pré et post-conditions de ce programme ? Démontrer la validité du triplet de Hoare correspondant.

Exercice 3

On considère le programme `Prog` suivant :

```
WHILE y != x DO
   x := x - 1;
   y := y - 2;
```

1. Quelles sont les pré et post-conditions de ce programme ?
2. Quel est l'invariant de la boucle ?
3. Démontrer la validité du triplet de Hoare correspondant à ce programme.
4. Donner un variant pour la boucle `WHILE`, c'est-à-dire une expression toujours positive et qui décroît strictement à chaque tour de boucle.

Exercice 4

On veut prouver que le programme suivant calcule X^N pour $N \geq 0$.

```
S := 1;
P := N;
WHILE P >= 1 DO
   S := S * X;
   P := P - 1;
```

1. Écrire la spécification du programme sous forme de pré et post-conditions.
2. Quel est le triplet de Hoare à prouver ?
3. Trouver un invariant pour la boucle `WHILE`, puis donner la preuve de la deuxième partie du programme.
4. Donner la preuve de la première partie du programme `S:=1; P:=N` pour terminer la preuve du programme.
5. Donner un variant pour la boucle `WHILE`.
6. On considère maintenant l'implémentation suivante :

   ```
   S := 1;
   P := 0;
   WHILE P < N DO
      S := S * X;
      P := P + 1;
   ```

   Comparer les spécifications, invariants et variants de ces deux implémentations. Quelle partie de la preuve du premier programme faut-il modifier pour obtenir une preuve de cette implémentation ?

Calcul de Hoare

$$\frac{}{\vdash \{P\}\ \texttt{SKIP}\ \{P\}}\ \textsf{skip} \qquad \frac{}{\vdash \{P[x \mapsto exp]\}\ \texttt{x := exp}\ \{P\}}\ \textsf{aff}$$

$$\frac{\vdash \{P \wedge cond\}\ \texttt{ins}_1\ \{Q\} \qquad \vdash \{P \wedge \neg cond\}\ \texttt{ins}_2\ \{Q\}}{\vdash \{P\}\ \texttt{IF cond THEN ins}_1\ \texttt{ELSE ins}_2\ \{Q\}}\ \textsf{if}$$

$$\frac{\vdash \{P \wedge cond\}\ \texttt{ins}\ \{P\}}{\vdash \{P\}\ \texttt{WHILE cond DO ins}\ \{P \wedge \neg cond\}}\ \textsf{while}$$

$$\frac{P \Rightarrow P' \qquad \vdash \{P'\}\ \texttt{ins}\ \{Q'\} \qquad Q' \Rightarrow Q}{\vdash \{P\}\ \texttt{ins}\ \{Q\}}\ \textsf{cons}$$

$$\frac{}{\vdash \{false\}\ \texttt{ins}\ \{P\}}\ \textsf{falseE} \qquad \frac{\vdash \{P\}\ \texttt{ins}_1\ \{Q\} \qquad \vdash \{Q\}\ \texttt{ins}_2\ \{R\}}{\vdash \{P\}\ \texttt{ins}_1\ \texttt{;}\ \texttt{ins}_2\ \{R\}}\ \textsf{seq}$$