Master d'Informatique M1 – Université Paris Sud

Initiation à la programmation fonctionnelle

Jean-Christophe Filliâtre

15 septembre 2005

pourquoi ce cours ?

Mise à niveau programmation Caml

Caml utilisé

- Cours de compilation : TD, examens
- Projet de compilation : écriture d'un compilateur en Caml

À faire :

- lire le poly de ce cours
- lire le poly Formation au langage Caml et faire les exercices

rappel

il n'y a pas de bon langage, il n'y a que de bons programmeurs

à lire : La programmation en pratique de Brian W. Kernighan & Robert Pike

I

Premiers pas en Caml

le premier programme

hello.ml

```
print_string "hello world!\n"
```

Compilation

```
% ocamlc -o hello hello.ml
```

Exécution

```
% ./hello
hello world!
```

déclarations

programme = suite de déclarations et d'expressions à évaluer

```
let x = 1 + 2;;
print_int x;;
let y = x * x;;
print_int y;;
```

notion de variable

`let` x `=` e introduit une variable globale

Différences avec la notion usuelle de variable :

1. nécessairement initialisée
2. type pas déclaré mais inféré
3. contenu non modifiable

références

Une variable modifiable s'appelle une référence

Elle est introduite avec `ref`

```
let x = ref 1;;
print_int !x;;
x := !x + 1;;
print_int !x;;
```

expressions et instructions

pas de distinction expression/instruction dans la syntaxe : que des expressions

constructions usuelles :

- conditionnelle

```
if i = 1 then 2 else 3
```

- boucle `for`

```
for i = 1 to 10 do x := !x + i done
```

- séquence

```
x := 1 ; 2 * !x
```

type `unit`

les expressions sans réelle valeur (affectation, boucle, ...) ont pour type `unit`

ce type a une unique valeur, notée `()`

c'est le type donné à la branche `else` lorsqu'elle est absente

correct :

```
if !x > 0 then x := 0
```

incorrect :

```
2 + (if !x > 0 then 1)
```

variables locales

En C ou Java, la portée d'une variable locale est définie par le bloc :

```
{
  int x = 1 ;
  ...
}
```

En Caml, variable locale introduite par `let in` :

```
  let x = 10 in x * x
```

Comme une variable globale :

- nécessairement initialisée
- type inféré
- immuable
- mais portée limitée à l'expression qui suit le `in`

let in = expression

let x = e1 in e2 est une expression

son type et sa valeur sont ceux de e2,

dans un environnement où x a le type et la valeur de e1

Exemple

```
let x = 1 in (let y = 2 in x + y) * (let z = 3 in x * z)
```

parallèle

Java	Caml
`{ int x = 1 ;`	`let x = ref 1 in`
`x = x + 1 ;`	`x := !x + 1 ;`
`int y = x * x ;`	`let y = !x * !x in`
`System.out.print(y) ; }`	`print_int y`

récapitulation

- programme = suite d'expressions et de déclarations
- variables introduites par le mot clé `let` non modifiables
- pas de distinction expression / instruction

la boucle d'interaction

version interactive du compilateur

```
% ocaml
        Objective Caml version 3.08.1


# let x = 1 in x + 2;;
```

```
- : int = 3
```

```
# let y = 1 + 2;;
```

```
val y : int = 3
```

```
# y * y;;
```

```
- : int = 9
```

II

Fonctions

syntaxe

```
# let f x = x * x;;
```

```
val f : int -> int = <fun>
```

- corps = expression (pas de `return`)
- type inféré (types de l'argument `x` et du résultat)

```
# f 4;;
```

```
- : int = 16
```

procédure

une procédure = une fonction dont le résultat est de type `unit`

Exemple

```
# let x = ref 1;;
# let set v = x := v;;
```

```
val set : int -> unit = <fun>
```

```
# set 3;;
```

```
- : unit = ()
```

```
# !x;;
```

```
- : int = 3
```

fonction “sans argument”

prend un argument de type `unit`

Exemple

```
# let reset () = x := 0;;
```

```
val reset : unit -> unit = <fun>
```

```
# reset ();;
```

fonction à plusieurs arguments

```
# let f x y z = if x > 0 then y + x else z - x;;
val f : int -> int -> int -> int = <fun>
```

```
# f 1 2 3;;
- : int = 3
```

fonction locale

fonction locale à une expression

```
# let carre x = x * x in carre 3 + carre 4 = carre 5;;
```

```
- : bool = true
```

fonction locale à une autre fonction

```
# let pythagore x y z =
    let carre n = n*n in carre x + carre y = carre z;;
```

```
val pythagore : int -> int -> int -> bool = <fun>
```

fonction comme valeur de première classe

fonction = expression comme une autre, introduite par `fun`

```
# fun x -> x+1
```

```
- : int -> int = <fun>
```

```
# (fun x -> x+1) 3;;
```

```
- : int = 4
```

En réalité

```
let f x = x+1;;
```

est la même chose que

```
let f = fun x -> x+1;;
```

application partielle

```
fun x y -> x*x + y*y
```

est la même chose que

```
fun x -> fun y -> x*x + y*y
```

on peut appliquer une fonction partiellement

Exemple

```
# let f x y = x*x + y*y;;
```

```
val f : int -> int -> int = <fun>
```

```
# let g = f 3;;
```

```
val g : int -> int = <fun>
```

```
# g 4;;
```

```
- : int = 25
```

application partielle (suite)

l'application partielle est une manière de retourner une fonction

mais on peut aussi retourner une fonction à l'issue d'un calcul

```
# let f x = let x2 = x * x in fun y -> x2 + y * y;;
```

```
val f : int -> int -> int = <fun>
```

une application partielle de `f` ne calcule `x*x` qu'une seule fois

application partielle : exemple

```
# let compteur_depuis n =
    let r = ref (n-1) in fun () -> incr r ; !r;;
```

```
val compteur_depuis : int -> unit -> int = <fun>
```

```
# let c = compteur_depuis 0;;
```

```
val c : unit -> int = <fun>
```

```
# c ();;
```

```
- : int = 0
```

```
# c ();;
```

```
- : int = 1
```

une fonction peut prendre des fonctions en arguments

```
# let intègre f =
    let n = 100 in
    let s = ref 0.0 in
    for i = 0 to n do
      let x = float i /. float n in s := !s +. f x
    done;
    !s /. float n
```

```
# intègre sin;;
```

```
- : float = 0.463901218235397317
```

```
# intègre (fun x -> x*.x);;
```

```
- : float = 0.33835
```

itérateurs

En Java on itère ainsi sur les éléments d'une structure de données

```
for (Enumeration e = v.elements() ; e.hasMoreElements() ;) {
    ... on traite e.nextElement() ...
}
```

En Caml, itérateur = fonction d'ordre supérieur

Exemple : table associant des chaînes de caractères

```
val iter : (string -> string -> unit) -> table -> unit
```

```
let n = ref 0 in iter (fun x y -> incr n) t ; !n
```

```
iter (fun x y -> Printf.printf "%s -> %s\n" x y) t
```

différence avec les pointeurs de fonctions

« en C aussi on peut passer et retourner des fonctions par l'intermédiaire de pointeurs de fonctions »

mais les fonctions d'ocaml sont plus que des pointeurs de fonctions

```
let f x = let x2 = x * x in fun y -> x2 + y * y;;
```

fonctions récursives

En Caml, le recours aux fonctions récursives est naturel, car

– un appel de fonction ne coûte pas cher

– la récursivité terminale est correctement compilée

Exemple :

```
let zéro f =
  let rec cherche i = if f i = 0 then i else cherche (i+1) in
  cherche 0
```

code récursif $\Rightarrow$ plus lisible, plus simple à justifier

polymorphisme

```
# let f x = x;;
val f : 'a -> 'a = <fun>
```

```
# f 3;;
- : int = 3
```

```
# f true;;
- : bool = true
```

```
# f print_int;;
- : int -> unit = <fun>
```

```
# f print_int 1;;
1- : unit = ()
```

polymorphisme (suite)

Caml infère toujours le type le plus général possible

Exemple :

```
# let compose f g = fun x -> f (g x);;
```

```
val compose : ('a -> 'b) -> ('c -> 'a) -> 'c -> 'b = <fun>
```

récapitulation

- fonctions = valeurs comme les autres : locales, anonymes, arguments d'autres fonctions, etc.
- partiellement appliquées
- polymorphes
- l'appel de fonction ne coûte pas cher

III

Allocation mémoire

GC

allocation mémoire réalisée par un garbage collector (GC)

Intérêts :

- récupération automatique
- allocation efficace

$\Rightarrow$ perdre le réflexe « allouer coûte cher »

... mais continuer à se soucier de complexité !

tableaux

```
# let a = Array.create 10 0;;
```

```
val a : int array = [|0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0|]
```

nécessairement initialisé

```
# let a = [| 1 ; 2 ; 3 ; 4 |];;
```

```
# a.(1) <- 5;;
```

```
- : unit = ()
```

```
# a;;
```

```
- : int array = [|1 ; 5 ; 3 ; 4|]
```

tri par insertion

```
let tri_insertion a =
  let swap i j = let t = a.(i) in a.(i) <- a.(j); a.(j) <- t in
  for i = 1 to Array.length a - 1 do
    (* insérer l'élément i dans 0..i-1 *)
    let j = ref (i - 1) in
    while !j >= 0 && a.(!j) > a.(!j + 1) do
      swap !j (!j + 1); decr j
    done
  done
```

tri par insertion

```
let tri_insertion a =
  let swap i j = let t = a.(i) in a.(i) <- a.(j) ; a.(j) <- t in
  for i = 1 to Array.length a - 1 do
    (* insérer l'élément i dans 0..i-1 *)
    let rec insère j =
      if j >= 0 && a.(j) > a.(j+1) then
      begin swap j (j+1) ; insère (j-1) end
    in
    insère (i-1)
  done
```

enregistrements

comme les records de Pascal ou les structures de C

on déclare le type enregistrement

```
type complexe = { re : float ; im : float }
```

allocation et initialisation simultanées :

```
# let x = { re = 1.0 ; im = -1.0 };;
```

```
val x : complexe = {re = 1. ; im = -1.}
```

```
# x.im;;
```

```
- : float = -1.
```

champs modifiables en place

```
type personne = { nom : string ; mutable age : int }
```

```
# let p =  { nom = "Martin" ; age = 23 };;
val p : personne = {nom = "Martin" ; age = 23}
# p.age <- p.age + 1;;
- : unit = ()
# p.age;;
- : int = 24
```

retour sur les références

référence = enregistrement du type suivant

```
type 'a ref = { mutable contents : 'a }
```

`ref`, `!` et `:=` ne sont que sucre syntaxique

seuls les tableaux et les champs déclarés mutable sont modifiables en place

n-uplets

notation usuelle

```
# (1,2,3);;
```

```
- : int * int * int = (1, 2, 3)
```

```
# let v = (1, true, "bonjour", 'a');;
```

```
val v : int * bool * string * char = (1, true, "bonjour", 'a')
```

accès aux éléments

```
# let (a,b,c,d) = v;;
```

```
val a : int = 1
val b : bool = true
val c : string = "bonjour"
val d : char = 'a'
```

n-uplets (suite)

Exemple d'utilisation

```
# let rec division n m =
    if n < m then (0, n)
    else let (q,r) = division (n - m) m in (q + 1, r);;
```

```
val division : int -> int -> int * int = <fun>
```

fonction prenant un n-uplet en argument

```
# let f (x,y) = x + y;;
```

```
val f : int * int -> int = <fun>
```

```
# f (1,2);;
```

```
- : int = 3
```

listes

type prédéfini de listes, α `list`, immuables et homogènes

construites à partir de la liste vide `[]` et de l'ajout en tête `::`

```
# let l = 1 :: 2 :: 3 :: [];;
```

```
val l : int list = [1; 2; 3]
```

```
# let l = [1; 2; 3];;
```

filtrage

filtrage = construction par cas sur la forme d'une liste

```
# let rec somme l =
    match l with
      [] -> 0
    | x :: r -> x + somme r;;
```

```
val somme : int list -> int = <fun>
```

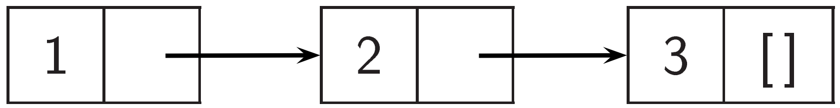
```
# somme [1;2;3];;
```

```
- : int = 6
```

représentation mémoire

listes Caml = mêmes listes chaînées qu'en C ou Java

la liste `[1 ; 2 ; 3]` correspond à



types construits

listes = cas particulier de types construits

type construit = réunion de plusieurs constructeurs

```
type formule = Vrai | Faux | Conjonction of formule * formule
```

```
# Vrai;;
```

```
- : formule = Vrai
```

```
# Conjonction (Vrai, Faux);;
```

```
- : formule = Conjonction (Vrai, Faux)
```

listes définies par

```
type 'a list = [] | :: of 'a * 'a list
```

filtrage

le filtrage se généralise

```
# let rec evalue = function
    | Vrai -> true
    | Faux -> false
    | Conjonction (f1, f2) -> evalue f1 && evalue f2;;
```

```
val evalue : formule -> bool = <fun>
```

filtrage

les motifs peuvent être imbriqués :

```
let rec evalue = function
  | Vrai -> true
  | Faux -> false
  | Conjonction (Faux, f2) -> false
  | Conjonction (f1, Faux) -> false
  | Conjonction (f1, f2) -> evalue f1 && evalue f2;;
```

filtrage

les motifs peuvent être omis ou regroupés

```
let rec evalue = function
  | Vrai -> true
  | Faux -> false
  | Conjonction (Faux, _) | Conjonction (_, Faux) -> false
  | Conjonction (f1, f2) -> evalue f1 && evalue f2;;
```

filtrage

le filtrage n'est pas limité aux types construits

```
let rec mult = function
  | [] -> 1
  | 0 :: _ -> 0
  | x :: l -> x * mult l
```

on peut écrire `let motif = expression` lorsqu'il y a un seul motif

récapitulation

- allouer ne coûte pas cher
- libération automatique
- valeurs allouées nécessairement initialisées
- majorité des valeurs non modifiables en place (seuls tableaux et champs d'enregistrements `mutable`)
- représentation mémoire des valeurs construites efficace
- filtrage = examen par cas sur les valeurs construites

IV

Exceptions

exceptions

c'est la notion usuelle

une exception peut être levée avec `raise`

```
  let division n m =
    if m = 0 then raise Division_by_zero else ...
```

et rattrapée avec `try with`

```
  try division x y with Division_by_zero -> (0,0)
```

on peut déclarer de nouvelles exceptions

```
exception Error
exception Unix_error of string
```

exceptions (exemple 1)

exception utilisée pour un résultat exceptionnel

```
try Hashtbl.find table clé
with Not_found -> ...
```

exceptions (exemple 2)

exception utilisée pour modifier le flot de contrôle

```
try
  while true do
    let key = read_key () in
    if key = 'q' then raise Exit ;
    ...
  done
with Exit ->
  close_graph () ; exit 0
```

V

Modules et foncteurs

génie logiciel

lorsque les programmes deviennent gros il faut
- découper en unités (modularité)
- occulter la représentation de certaines données (encapsulation)
- éviter au mieux la duplication de code

en Caml : fonctionnalités apportées par les modules

fichiers et modules

chaque fichier est un module

si `arith.ml` contient

```
let pi = 3.141592
let round x = floor (x +. 0.5)
```

alors on le compile avec

```
% ocamlc -c arith.ml
```

utilisation dans un autre module `main.ml` :

```
let x = float_of_string (read_line ());;
print_float (Arith.round (x /. Arith.pi));;
print_newline ();;
```

```
% ocamlc -c main.ml
```

```
% ocamlc arith.cmo main.cmo
```

encapsulation

on peut restreindre les valeurs exportées avec une interface

dans un fichier `arith.mli`

```
val round : float -> float
```

```
% ocamlc -c arith.mli
% ocamlc -c arith.ml
```

```
% ocamlc -c main.ml
File "main.ml", line 2, characters 33-41 :
Unbound value Arith.pi
```

encapsulation (suite)

une interface peut restreindre la visibilité de la définition d'un type

dans `ensemble.ml`

```
type t = int list
val vide : t
val ajoute : int -> t -> t
val appartient : int -> t -> bool
```

mais dans `ensemble.mli`

```
type t
val vide : t
val ajoute : int -> t -> t
val appartient : int -> t -> bool
```

le type `t` est un type abstrait

compilation séparée

la compilation d'un fichier ne dépend que des interfaces des fichiers utilisés

$\Rightarrow$ moins de recompilation quand un code change mais pas son interface

langage de modules

modules non restreints aux fichiers

```
module M = struct
  let c = 100
  let f x = c * x
end
```

```
module A = struct
  let a = 2
  module B = struct
    let b = 3
    let f x = a * b * x
  end
  let f x = B.f (x + 1)
end
```

langage de modules

de même pour les signatures

```
module type S = sig
  val f : int -> int
end
```

contrainte

```
module M : S = struct
  let a = 2
  let f x = a * x
end
```

```
# M.a;;
```

```
Unbound value M.a
```

récapitulation

- modularité par découpage du code en unités appelées modules
- encapsulation de types et de valeurs, types abstraits
- vraie compilation séparée
- organisation de l'espace de nommage

foncteurs

foncteur = module paramétré par un ou plusieurs autres modules

Exemple : table de hachage générique

Il faut paramétrer par rapport à la fonction de hachage et la fonction d'égalité

première solution

passer les foncitons en argument :

```
type 'a t

val create : int -> 'a t

val add : ('a -> int) -> 'a t -> 'a -> unit

val mem : ('a -> int) -> ('a -> 'a -> bool) -> 'a t -> 'a -> bool
```

deuxième solution

passer les fonctions à la création :

```
type 'a t

val create : ('a -> int) -> ('a -> 'a -> bool) -> int -> 'a t

val add : 'a t -> 'a -> unit

val mem : 'a t -> 'a -> bool
```

```
type 'a t = { hash : 'a -> int;
              eq : 'a -> 'a -> bool;
              data : 'a list array }
let create h eq n =
  { hash = h; eq = eq; data = Array.create n [] }
...
```

la bonne solution : un foncteur

```
module F(X : S) = struct ... end
```

```
module type S = sig
  type elt
  val hash : elt -> int
  val eq : elt -> elt -> bool
end
```

foncteur : le code

```
module F(X : S) = struct
  type t = X.elt list array
  let create n = Array.create n []
  let add t x =
    let i = (X.hash x) mod (Array.length t) in
    t.(i) <- x :: t.(i)
  let mem t x =
    let i = (X.hash x) mod (Array.length t) in
    List.exists (X.eq x) t.(i)
end
```

foncteur : l'interface

```
module F(X : S) : sig
  type t
  val create : int -> t
  val add : t -> X.elt -> unit
  val mem : t -> X.elt -> bool
end
```

foncteur : utilisation

```
module Entiers = struct
  type elt = int
  let hash x = abs x
  let eq x y = x=y
end
```

```
module Hentiers = F(Entiers)
```

```
# let t = Hentiers.create 17;;
val t : Hentiers.t = <abstr>
# Hentiers.add t 13;;
- : unit = ()
# Hentiers.add t 173;;
- : unit = ()
```

```
# Hentiers.mem t 13;;
- : bool = true
# Hentiers.mem t 14;;
- : bool = false
```

foncteurs : applications

1. structures de données paramétrées par d'autres structures de données
   - `Hashtbl.Make` : tables de hachage
   - `Set.Make` : ensembles finis codés par des arbres équilibrés
   - `Map.Make` : tables d'association codées par des arbres équilibrés

2. algorithmes paramétrés par des structures de données

   exemple : algorithme de Dijkstra de recherche de plus court chemin écrit indépendamment de la structure de graphes

algorithme de Dijkstra « générique »

```
module Dijkstra
      (G : sig
             type graph
             type sommet
             val voisins : graph -> sommet -> (sommet * int) list
           end) :
  sig
    val plus_court_chemin :
      G.graph -> G.sommet -> G.sommet -> G.sommet list * int
  end
```

VI

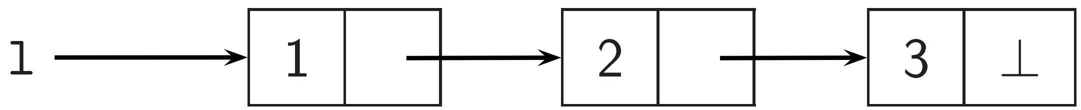
Persistance

structures de données immuables

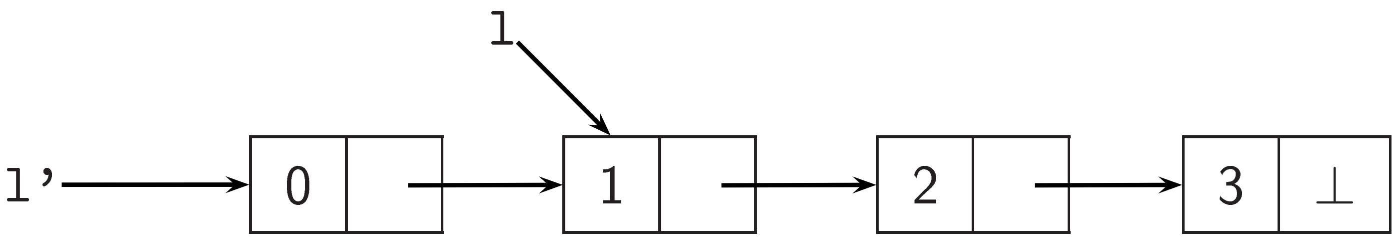
structure de données immuables ⇒

- une valeur n'est pas affectée par une opération,
- mais une nouvelle valeur est retournée

```
let l = [1 ; 2 ; 3]
```



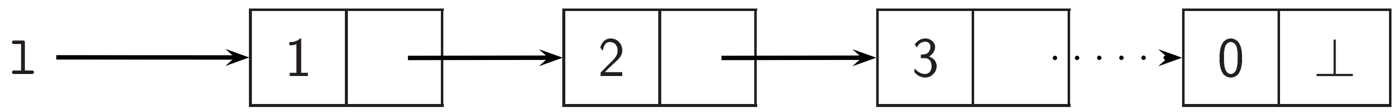

```
let l' = 0 :: l
```



pas de copie, mais partage

contrepartie

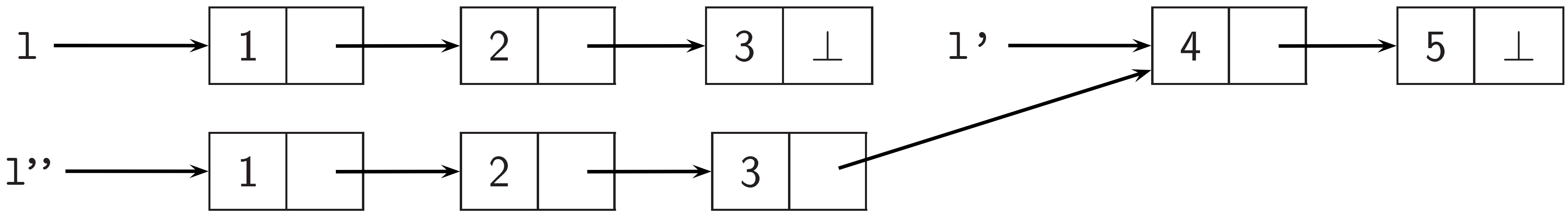
un ajout en queue de liste n'est pas aussi simple :



concaténation de deux listes

```
let rec append l1 l2 = match l1 with
  | [] -> l2
  | x :: l -> x :: append l l2
```

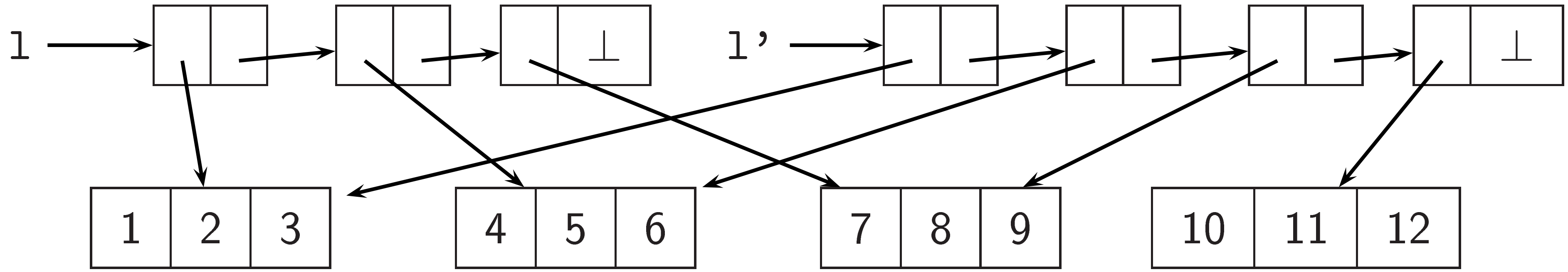
```
let l = [1 ; 2 ; 3]
let l' = [4 ; 5]
let l'' = append l l '
```



blocs de `l` copiés, blocs de `l'` partagés

quid des éléments

```
let l =[(1,2,3) ; (4,5,6) ; (7,8,9)];;
append l [(10,11,12)];;
```



listes chaînées modifiables en place

```
type 'a liste = Vide | Element of 'a element
and 'a element = { valeur : 'a ; mutable suivant : 'a liste };;
```

intérêts pratiques de la persistance

1. correction des programmes
   - code plus simple
   - raisonnement mathématique possible

2. outil puissant pour le backtracking
   - algorithmes de recherche
   - manipulations symboliques et portées
   - rétablissement suite à une erreur

persistance et backtracking (1)

recherche de la sortie dans un labyrinthe

```
type état
val sortie : état -> bool
type déplacement
val déplacements : état -> déplacement list
val déplace : état -> déplacement -> état
```

```
let rec cherche e =
  sortie e || essaye e (déplacements e)
and essaye e = function
  | [] -> false
  | d :: r -> cherche (déplace d e) || essaye e r
```

sans persistance

avec un état global modifié en place :

```
let rec cherche () =
  sortie () || essaye (déplacements ())
and essaye = function
  | [] -> false
  | d :: r -> (déplace d ; cherche ()) || (revient d ; essaye r)
```

persistance et backtracking (2)

programmes très simples, représentées par

```
type instr =
  | Return of string
  | Var of string * int
  | If of string * string * instr list * instr list
```

on veut vérifier que toute variable utilisée est auparavant déclarée (dans une liste d'instructions)

```
val vérifie_instr : string list -> instr -> bool
val vérifie_prog  : string list -> instr list -> bool
```

persistance et backtracking (2)

```
let rec vérifie_instr vars = function
  | Return x ->
      List.mem x vars
  | If (x, y, p1, p2) ->
      List.mem x vars && List.mem y vars &&
      vérifie_prog vars p1 && vérifie_prog vars p2
  | Var _ ->
      true
```

```
and vérifie_prog vars = function
  | [] ->
      true
  | Var (x, _) :: p ->
      vérifie_prog (x :: vars) p
  | i :: p ->
      vérifie_instr vars i && vérifie_prog vars p
```

persistance et backtracking (3)

programme manipulant une base de données

mise à jour complexe, nécessitant de nombreuses opérations

avec une structure modifiée en place

```
try
  ... effectuer l'opération de mise à jour ...
with e ->
  ... rétablir la base dans un état cohérent ...
  ... traiter ensuite l'erreur ...
```

persistance et backtracking (3)

avec une structure persistante

```
let bd = ref (... base initiale ...)
...
try
  bd := (... opération de mise à jour de !bd ...)
with e ->
  ... traiter l'erreur ...
```

interface et persistance

le caractère persitant d'un type abstrait n'est pas évident

la signature fournit l'information implicitement

structure modifée en place

```
type t
val create : unit -> t
val add : int -> t -> unit
val remove : int -> t -> unit
...
```

structure persistante

```
type t
val empty : t
val add : int -> t -> t
val remove : int -> t -> t
...
```

persistance et effets de bords

persistant ne signifie pas sans effet de bord

$$\textit{persistant} = \textit{observationnellement immuable}$$

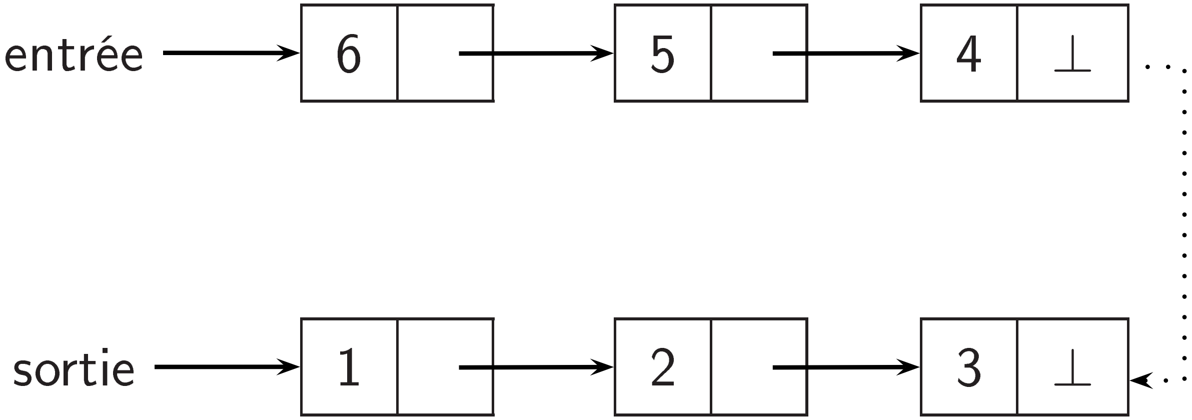
on a seulement l'implication dans un sens :

$$\textit{purement fonctionnel} \Rightarrow \textit{persistant}$$

la réciproque est fausse

exemple : files persistantes

```
type 'a t
val create : unit -> 'a t
val push : 'a -> 'a t -> 'a t
exception Empty
val pop : 'a t -> 'a * 'a t
```



exemple : files persistantes

```
type 'a t = 'a list * 'a list
let create () = [], []
let push x (e,s) = (x :: e, s)
exception Empty
let pop = function
  | e, x :: s -> x, (e,s)
  | e, [] -> match List.rev e with
    | x :: s -> x, ([], s)
    | [] -> raise Empty
```

exemple : files persistantes

maintenant avec un effet de bord

```
type 'a t = {mutable entrée : 'a list ; mutable sortie : 'a list}
let create () = { entrée = [] ; sortie = [] }
let push x q = { entrée = x :: q.entrée ; sortie = q.sortie }
exception Empty
```

```
let pop q = match q.sortie with
  | x :: s ->
    x, { entrée = q.entrée ; sortie = s }
  | [] -> match List.rev q.entrée with
    | [] ->
        raise Empty
    | x :: s as r ->
        q.entrée <- [] ; q.sortie <- r ;
        x, { entrée = [] ; sortie = s }
```