

$$f(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{si } n > 100, \\ f(f(n + 11)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

## Vérification déductive de programmes avec Why3

Jean-Christophe Filliâtre  
CNRS

JFLA 2012

## Anniversaire

## Anniversaire

$$f(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{si } n > 100, \\ f(f(n + 11)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

quand est-ce que  $f$  renvoie 91 ? termine-t-elle toujours ?

$$f(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{si } n > 100, \\ f(f(n + 11)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

quand est-ce que  $f$  renvoie 91 ? termine-t-elle toujours ?  
est-ce équivalent au programme suivant ?

```
e ← 1
while e > 0 do
  if n > 100 then
    n ← n - 10
    e ← e - 1
  else
    n ← n + 11
    e ← e + 1
return n
```

## Une autre question

## Plus difficile

ce code Java trie-t-il bien un tableau de booléens ?

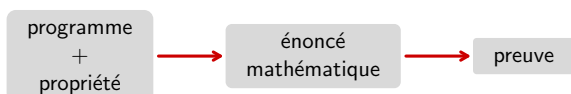
```
int i = 0, j = a.length - 1;
while (i < j)
  if (!a[i]) i++;
  else if (a[j]) j--;
  else swap(a, i++, j--);
```

ce programme C est-il correct ?

```
t(a,b,c){int d=0,e=a~b&~c,f=1;if(a)for(f=0;d=(e-=d)&-e;f+=t(a-d,(b+d)*2,(c+d)/2));return f;}main(q){scanf("%d",&q);printf("%d\n",t(~(~0<<q),0,0));}
```

## Vérification déductive de programmes

## L'outil Why



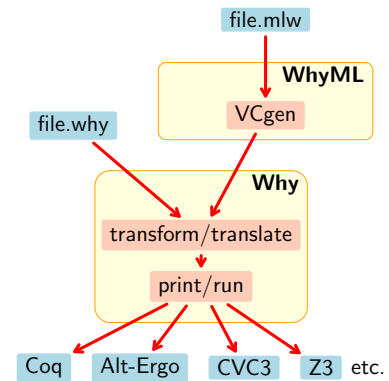
aujourd'hui rendu possible par la **révolution SMT**

- développé depuis une dizaine d'années dans l'équipe ProVal (LRI / INRIA)
- utilisé pour la preuve
  - de programmes Java : Krakatoa (Marché Paulin Urbain)
  - de programmes C : Caduceus (Filliâtre Marché) hier puis greffon Jessie de Frama-C (Marché Moy) aujourd'hui d'algorithmes
  - de programmes probabilistes (Barthe et al.)
  - de programmes cryptographiques (Vieira)

nouvelle version, développée depuis février 2010

auteurs : F. Bobot, JCF, C. Marché, G. Melquiond, A. Paskevich

<http://why3.lri.fr/>



partie 1

## Logique

démo

## Récapitulation

## Récapitulation

logique de Why3 = **logique du premier ordre polymorphe**, avec

- types algébriques (mutuellement) récurifs
- symboles de fonctions/prédicats (mutuellement) récurifs
- prédicats (mutuellement) inductifs
- let-in, match-with, if-then-else

en savoir plus :

- *Expressing Polymorphic Types in a Many-Sorted Language. (FroCos 2011)*

- déclaration de type
  - abstrait : **type** t
  - alias : **type** t = list int
  - algébrique : **type** list 'a = Nil | Cons 'a (list 'a)
- déclaration de fonction / prédicat
  - non interprété : **function** f int : int
  - défini : **predicate** non\_empty (l: list 'a) = l <> Nil
- déclaration de prédicat inductif
  - **inductive** trans t t = ...
- axiome / lemme / but
  - **goal** G: forall x: int. x >= 0 -> x\*x >= 0

## Récapitulation

## Récapitulation

logique organisée en **théories**

une théorie  $T_1$  peut être

- utilisée (**use**) dans une théorie  $T_2$
- clonée (**clone**) par une autre théorie  $T_2$

logique organisée en **théories**

une théorie  $T_1$  peut être

- utilisée (**use**) dans une théorie  $T_2$ 
  - les symboles de  $T_1$  sont **partagés**
  - les axiomes de  $T_1$  restent des axiomes
  - les lemmes de  $T_1$  deviennent des axiomes
  - les buts de  $T_1$  sont ignorés
- clonée (**clone**) par une autre théorie  $T_2$

logique organisée en théories

une théorie  $T_1$  peut être

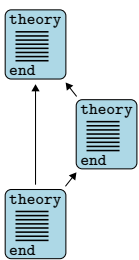
- utilisée (**use**) dans une théorie  $T_2$
- clonée (**clone**) par une autre théorie  $T_2$ 
  - les déclarations de  $T_1$  sont copiées ou remplacées
  - les axiomes de  $T_1$  restent des axiomes ou deviennent des lemmes/buts
  - les lemmes de  $T_1$  deviennent des axiomes
  - les buts de  $T_1$  sont ignorés

une **technologie** pour parler à l'oreille des démonstrateurs

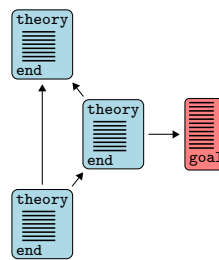
organisée autour de la notion de **tâche** = contexte + but

Le parcours d'une tâche

Le parcours d'une tâche



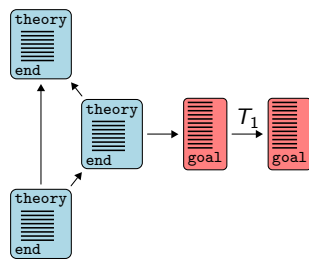
Alt-Ergo  
Z3  
Vampire



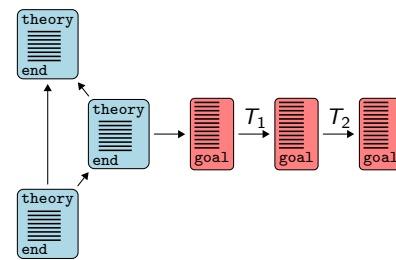
Alt-Ergo  
Z3  
Vampire

Le parcours d'une tâche

Le parcours d'une tâche



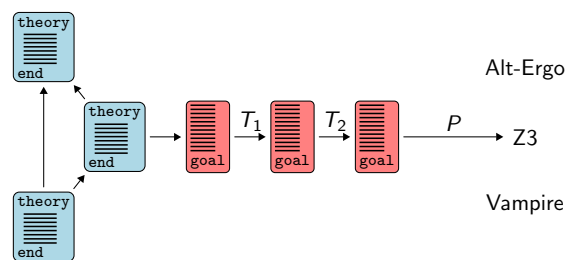
Alt-Ergo  
Z3  
Vampire



Alt-Ergo  
Z3  
Vampire

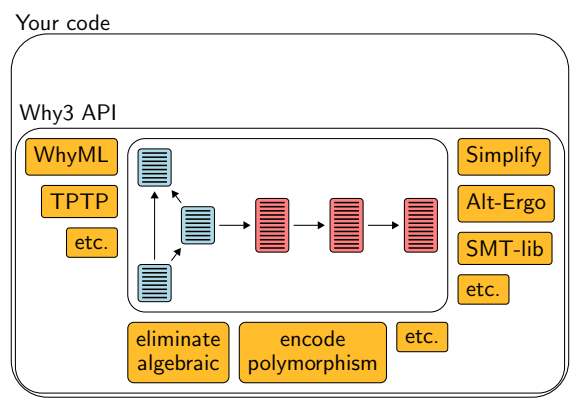
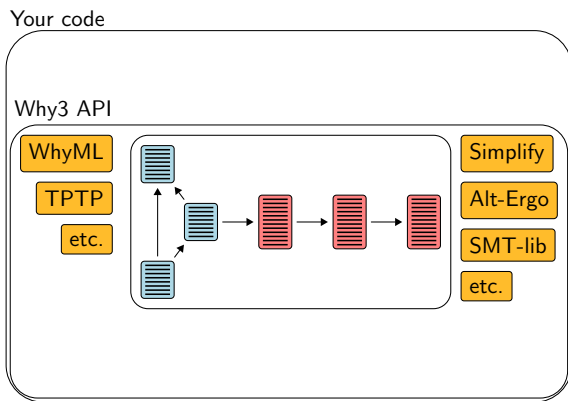
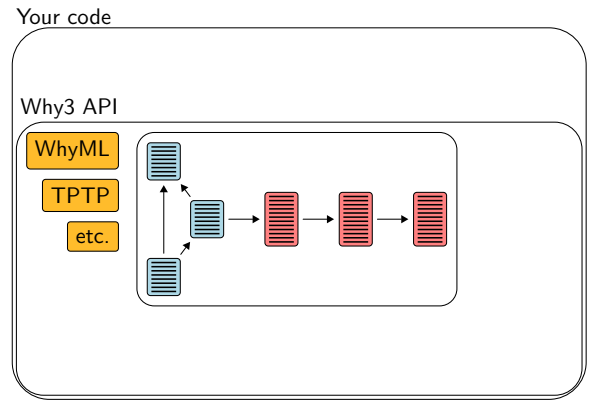
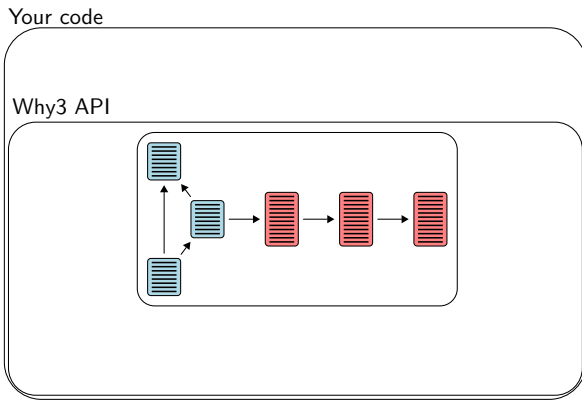
Le parcours d'une tâche

Pilote



le parcours d'une tâche est piloté par un fichier

- transformations à appliquer
- format de sortie
  - syntaxe de sortie
  - symboles / axiomes prédéfinis
- diagnostique des messages du démonstrateur



Récapitulation

- nombreux démonstrateurs supportés
  - Coq, SMT, TPTP, Gappa
- système extensible par l'utilisateur
  - syntaxe d'entrée
  - transformations
  - syntaxe de sortie
- efficace
  - le résultat des transformations est mémoisé

partie 2

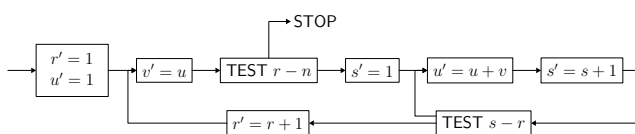
Preuve de programmes

en savoir plus :

- *Why3 : Shepherd your herd of provers.* (Boogie 2011)

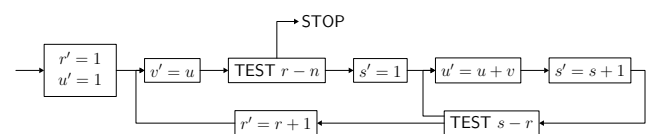
Un exemple historique

A. M. Turing. *Checking a Large Routine.* 1949.



Un exemple historique

A. M. Turing. *Checking a Large Routine.* 1949.



```

u ← 1
for r = 0 to n - 1 do
  v ← u
  for s = 1 to r do
    u ← u + v
  
```

$$f(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{si } n > 100, \\ f(f(n + 11)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

démo (accès au code)

$$f(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{si } n > 100, \\ f(f(n + 11)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

démo (accès au code)

```
e ← 1
while e > 0 do
  if n > 100 then
    n ← n - 10
    e ← e - 1
  else
    n ← n + 11
    e ← e + 1
return n
```

démo (accès au code)

## Récapitulation

## Récapitulation

- pré/postcondition

```
let f x = { P } ... { Q }
```

- invariant de boucle

```
while ... do invariant { I } ... done
```

```
for i = ... do invariant { I(i) } ... done
```

la terminaison d'une boucle (resp. fonction récursive) est garantie par un variant

variant {t} with R

- R est une relation d'ordre bien fondée
- t décroît pour R à chaque tour de boucle (resp. chaque appel récursif)

par défaut, t est de type int et R la relation

$$y \prec x \stackrel{\text{def}}{=} y < x \wedge 0 \leq x$$

## Remarque

## Structures de données

comme on l'a vu avec la fonction 91, prouver la terminaison peut nécessiter de prouver également des propriétés fonctionnelles

un autre exemple :

- l'algorithme du lièvre et de la tortue de Floyd

jusqu'à présent, on s'est limité aux entiers

considérons maintenant des structures plus complexes

- tableaux
- types algébriques

## Tableaux

## Exemple

la bibliothèque de Why3 fournit des tableaux

```
use import module array.Array
```

c'est-à-dire

- un type polymorphe

```
array 'a
```

- une opération d'accès, notée

```
a[e]
```

- une opération d'affectation, notée

```
a[e1] <- e2
```

- des opérations create, append, sub, copy, etc.

trier un tableau de booléens, avec l'algorithme suivant

```
let two_way_sort (a: array bool) =
  let i = ref 0 in
  let j = ref (length a - 1) in
  while !i < !j do
    if not a[!i] then
      incr i
    else if a[!j] then
      decr j
    else begin
      let tmp = a[!i] in
      a[!i] <- a[!j];
      a[!j] <- tmp;
      incr i;
      decr j
    end
  end
done
```

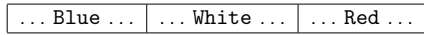
False	?	...	?	True
	↑		↑	
	i		j	

démo (accès au code)

un tableau contient des valeurs de trois sortes

```
type color = Blue | White | Red
```

il s'agit de le trier, de manière à avoir au final



```
let dutch_flag (a:array color) (n:int) =
  let b = ref 0 in
  let i = ref 0 in
  let r = ref n in
  while !i < !r do
    match a[!i] with
    | Blue ->
      swap a !b !i;
      incr b;
      incr i
    | White ->
      incr i
    | Red ->
      decr r;
      swap a !r !i
  end
done
```

exercice : exo\_flag.mlw

Remarque

Principe

tout comme prouver la terminaison, chercher à montrer la bonne exécution (par ex. pas d'accès en dehors des bornes) peut être arbitrairement compliqué

un exemple :

- calcul des  $N$  premiers nombres premiers de Knuth (TAOCP)

une **idée centrale** de la logique de Hoare :

*tous les types et symboles logiques peuvent être utilisés dans les programmes*

note : on l'a déjà fait avec le type int

Types algébriques

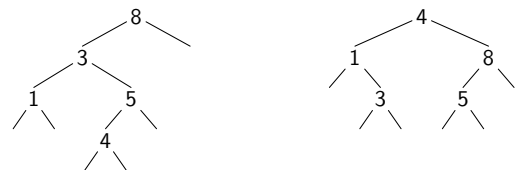
Exemple : same fringe

il en va de même des types algébriques en particulier

dans la bibliothèque, on trouve notamment

```
type bool = True | False (dans bool.Bool)
type option 'a = None | Some 'a (dans option.Option)
type list 'a = Nil | Cons 'a (list 'a) (dans list.List)
```

étant donnés deux arbres binaires, présentent-ils les mêmes éléments dans un parcours infixe ?

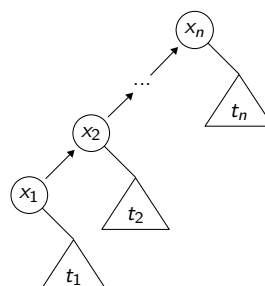


Exemple : same fringe

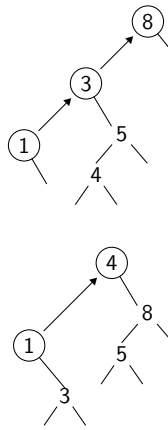
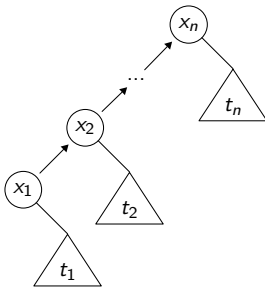
Exemple : same fringe

```
type elt
type tree =
  | Empty
  | Node tree elt tree
function elements (t: tree) : list elt = match t with
  | Empty -> Nil
  | Node l x r -> elements l ++ Cons x (elements r)
end
let same_fringe t1 t2 =
  { }
  ...
  { result=True <-> elements t1 = elements t2 }
```

une solution : voir la branche gauche comme une liste, de bas en haut



une solution : voir la branche gauche  
comme une liste, de bas en haut



démo (accès au code)

partie 3

## Modélisation

```
type elt
type tree = Null | Node tree elt tree
```

parcours infixe de t, pour stocker ses éléments dans le tableau a

```
let rec fill (t: tree) (a: array elt) (start: int) : int =
  match t with
  | Null ->
    start
  | Node l x r ->
    let res = fill l a start in
    if res <> length a then begin
      a[res] <- x;
      fill r a (res + 1)
    end else
      res
    end
```

exercice : exo\_fill.mlw

## Retour sur les tableaux

dans la bibliothèque, on trouve

```
type array 'a model { | length: int; mutable elts: map int 'a | }
```

deux significations différentes :

- dans les programmes, un type abstrait :

```
type array 'a
```

- dans la logique, un enregistrement immuable :

```
type array 'a = { | length: int; elts: map int 'a | }
```

## Retour sur les tableaux

## Modélisation

on ne peut pas coder d'opérations sur le type array 'a  
(il est abstrait) mais on peut les déclarer

exemples :

```
val ([]) (a: array 'a) (i: int) :
  { 0 <= i < length a }
  'a
  reads a
  { result = Map.get a.elts i }
```

```
val ([]<-) (a: array 'a) (i: int) (v: 'a) :
  { 0 <= i < length a }
  unit
  writes a
  { a.elts = Map.set (old a.elts) i v }
```

on peut modéliser de la même manière de nombreuses structures  
de données, qu'elles soient codées ou non

exemples : piles, files, files de priorité, graphes, etc.

## Exemple : tables de hachage

## Limitation

```
type t 'a 'b

val create: int -> t 'a 'b

val clear: t 'a 'b -> unit

val add: t 'a 'b -> 'a -> 'b -> unit

exception Not_found

val find: t 'a 'b -> 'a -> 'b
```

il est également possible de coder les tables de hachage  
(cf le code dans le transparent précédent)

```
type t 'a 'b = array (list ('a, 'b))
...
```

cependant, il n'est pas (encore) possible de vérifier que ce code est  
conforme au modèle précédent

démo (accès au code)

l'idée de modélisation n'est pas limitée aux structures impératives

exemple : une file réalisée avec deux listes

```
type queue 'a = { | front: list 'a; lenf: int;
                  rear : list 'a; lenr: int; | }
```

peut être modélisée par une seule liste

```
function sequence (q: queue 'a) : list 'a =
  q.front ++ reverse q.rear
```

modélisons l'arithmétique 32 bits signée

deux possibilités :

- prouver l'absence de débordement arithmétique
- modéliser fidèlement l'arithmétique de la machine

une contrainte :

ne pas perdre les capacités arithmétiques des démonstrateurs

## Arithmétique 32 bits

## Arithmétique 32 bits

on introduit un nouveau type pour les entiers 32 bits

```
type int32
```

sa valeur est donnée par

```
function toint int32 : int
```

dans les annotations, on n'utilise que le type int

une expression  $x : \text{int32}$  apparaît donc sous la forme `toint x`

on définit la plage des entiers 32 bits

```
function min_int: int = -2147483648
function max_int: int = 2147483647
```

quand on les utilise...

```
axiom int32_domain:
  forall x: int32. min_int <= toint x <= max_int
```

... et quand on les construit

```
val ofint (x:int) :
  { min_int <= x <= max_int }
  int32
  { toint result = x }
```

## Application

## Binary Search

considérons la recherche dichotomique dans un tableau trié  
(*binary search*)

montrons l'absence de débordement arithmétique

### démo

on a trouvé un bug

le calcul

```
let m = (1 + u) / 2 in
```

peut provoquer un débordement arithmétique  
(par exemple avec un tableau de 2 milliards d'éléments)

on peut corriger ainsi

```
let m = 1 + (u - 1) / 2 in
```

## Principe

## Modèle mémoire

la seconde idée centrale de la logique de Hoare

*on peut identifier statiquement les différents emplacements mémoire ; c'est l'absence d'alias*

en particulier, les emplacements mémoire ne sont pas des valeurs de première classe dans la logique

pour traiter des programmes avec alias,  
il faut modéliser la mémoire

exemple : un modèle pour des programmes C  
avec des pointeurs de type `int*`

```
type pointer
```

```
val memory: ref (map pointer int)
```

une expression C

```
*p
```

devient l'expression `Why3`

```
!memory [p]
```



il existe des modèles plus subtiles  
comme le modèle Burstall / Bornat, dit *component-as-array*

chaque champ de structure devient un tableau

partie 4

le type C

```
struct List {
  int head;
  struct List *next;
};
```

est modélisé par

```
type pointer
val head: ref (map pointer int)
val next: ref (map pointer pointer)
```

Conclusion

Non traité dans ce cours

Conclusion

- comment sont exclus les alias
- comment sont calculées les obligations de preuve
- comment les formules sont envoyées aux démonstrateurs
- comment modéliser l'arithmétique flottante
- etc.

on a vu **trois usages** distincts de Why3

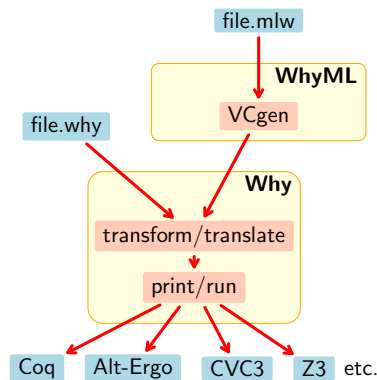
- langage logique
- preuve de programmes
- langage intermédiaire

Un langage logique

Pour la preuve de programmes ML

on peut utiliser Why3  
uniquement comme un  
**langage unique** pour  
parler aux démonstrateurs

on encore uniquement  
pour l'API OCaml  
de sa logique

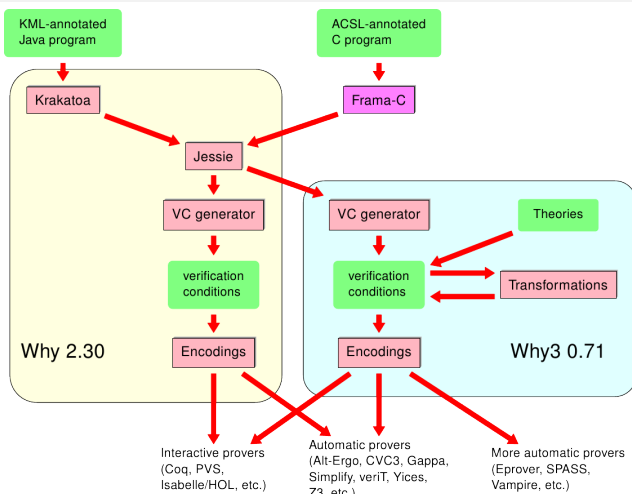


51 preuves de programmes avec Why3 sur

<http://proval.lri.fr/gallery/>

note : il y aura (bientôt) une extraction de code OCaml

Comme langage intermédiaire



merci