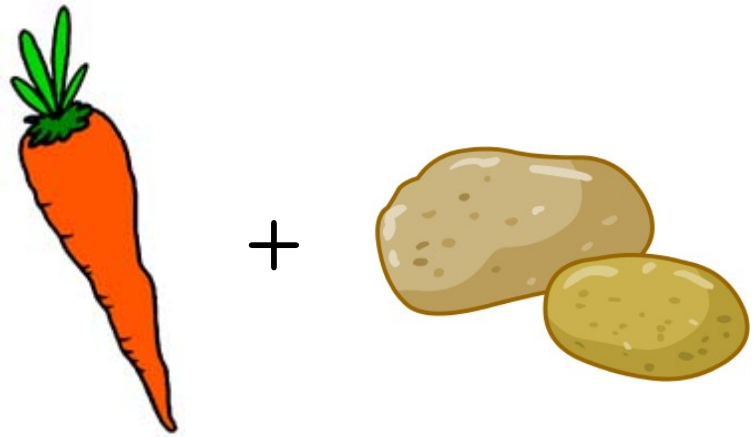
École Normale Supérieure

Langages de programmation et compilation

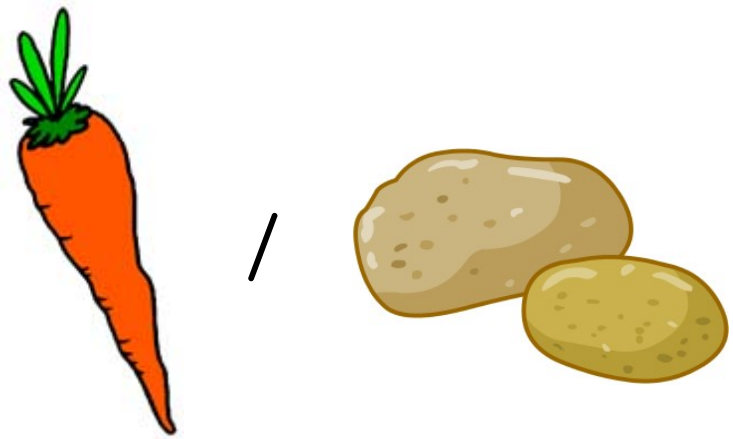
Jean-Christophe Filliâtre

Cours 4 / 22 octobre 2009

Typage



Typage



Typage

si j'écris l'expression

```
"5" + 37
```

dois-je obtenir

- une erreur ? (Caml)
- l'entier 42 ? (Visual Basic)
- la chaîne "537" ? (Java)
- autre chose encore ?

et qu'en est-il de

```
37 / "5"
```

?

Typage

et si on additionne deux expressions arbitraires

```
e1 + e2
```

comment déterminer si cela est légal, et ce que l'on doit faire le cas échéant ?

la réponse est le **typage**, une analyse statique du programme qui associe un **type** à chaque sous-expression, dans le but de rejeter les programmes incohérents mais aussi de permettre la compilation

Slogan

well typed programs do not go wrong

Objectifs du typage

- le typage doit être **décidable**
- le typage doit rejeter les programmes absurdes comme 1 2, dont l'évaluation échouerait ; c'est la **sûreté du typage**
- le typage ne doit pas rejeter trop de programmes non-absurdes, *i.e.* le système de types doit être **expressif**

Plusieurs solutions

1. toutes les sous-expressions sont annotées par un type

   $\texttt{fun}\,(x : \texttt{int}) \to \texttt{let}\,(y : \texttt{int}) = (+:)(((x : \texttt{int}), (1 : \texttt{int})) : \texttt{int}\times\texttt{int})$

   facile de vérifier mais trop fastidieux pour le programmeur

2. annoter seulement les variables (Pascal, C, Java, etc.)

   $$\texttt{fun}\,(x : \texttt{int}) \to \texttt{let}\,(y : \texttt{int}) = +(x, 1)\ \texttt{in}\ y$$

3. annoter seulement les paramètres de fonctions

   $$\texttt{fun}\,(x : \texttt{int}) \to \texttt{let}\ y = +(x, 1)\ \texttt{in}\ y$$

4. ne rien annoter $\Rightarrow$ **inférence** complète (Caml, Haskell, etc.)

Propriétés attendues

un algorithme de typage doit avoir les propriétés de

- **correction** : si l'algorithme répond "oui" alors le programme est effectivement bien typé
- **complétude** : si le programme est bien typé, alors l'algorithme doit répondre "oui"

et éventuellement de

- **principalité** : le type calculé pour une expression est le plus général possible

Typage de mini-ML

considérons le typage de mini-ML

1. typage monomorphe
2. typage polymorphe, inférence de types

mini-ML

rappel

e	::=	x	identificateur
	|	c	constante (1, 2, ..., *true*, ...)
	|	op	primitive ($+$, $\times$, *fst*, ...)
	|	$\texttt{fun}\ x \to e$	fonction
	|	$e\ e$	application
	|	(e, e)	paire
	|	$\texttt{let}\ x = e\ \texttt{in}\ e$	liaison locale

Typage monomorphe de mini-ML

on se donne des **types simples**, dont la syntaxe abstraite est

τ	::=	$\texttt{int} \mid \texttt{bool} \mid \ldots$	*types de base*
	|	$\tau \to \tau$	*type d'une fonction*
	|	$\tau \times \tau$	*type d'une paire*

Jugement de typage

le **jugement** de typage que l'on va définir se note

$$\Gamma \vdash e : \tau$$

et se lit « dans l'environnement Γ, l'expression e a le type τ »

l'environnement Γ associe un type $\Gamma(x)$ à toute variable x libre dans e

Règles de typage

$$\frac{}{\Gamma \vdash x : \Gamma(x)} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash n : \texttt{int}}\ldots \qquad \frac{}{\Gamma \vdash + : \texttt{int} \times \texttt{int} \to \texttt{int}}\ldots$$

$$\frac{\Gamma + x : \tau_1 \vdash e : \tau_2}{\Gamma \vdash \texttt{fun}\ x \to e : \tau_1 \to \tau_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau' \to \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau'}{\Gamma \vdash e_1\ e_2 : \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash (e_1, e_2) : \tau_1 \times \tau_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \quad \Gamma + x : \tau_1 \vdash e_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash \texttt{let}\ x = e_1\ \texttt{in}\ e_2 : \tau_2}$$

$\Gamma + x : \tau$ est l'environnement Γ' défini par $\Gamma'(x) = \tau$ et $\Gamma'(y) = \Gamma(y)$ sinon

Exemple

$$\dfrac{\dfrac{\vdots \quad \dfrac{\vdots}{x : \texttt{int} \vdash (x, 1) : \texttt{int} \times \texttt{int}}}{x : \texttt{int} \vdash +(x, 1) : \texttt{int}}}{\dfrac{\emptyset \vdash \texttt{fun}\ x \to +(x, 1) : \texttt{int} \to \texttt{int} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\ldots \vdash f : \texttt{int} \to \texttt{int}} \quad \dfrac{}{\ldots \vdash 2 : \texttt{int}}}{f : \texttt{int} \to \texttt{int} \vdash f\ 2 : \texttt{int}}}{\emptyset \vdash \texttt{let}\ f = \texttt{fun}\ x \to +(x, 1)\ \texttt{in}\ f\ 2 : \texttt{int}}}$$

Expressions non typables

en revanche, on ne peut pas typer le programme 1 2

$$\frac{\Gamma \vdash 1 : \tau' \to \tau \qquad \Gamma \vdash 2 : \tau'}{\Gamma \vdash 1\ 2 : \tau}$$

ni le programme $\texttt{fun}\ x \to x\ x$

$$\frac{\dfrac{\Gamma + x : \tau_1 \vdash x : \tau_3 \to \tau_2 \qquad \Gamma + x : \tau_1 \vdash x : \tau_3}{\Gamma + x : \tau_1 \vdash x\ x : \tau_2}}{\Gamma \vdash \texttt{fun}\ x \to x\ x : \tau_1 \to \tau_2}$$

car $\tau_1 = \tau_1 \to \tau_2$ n'a pas de solution (les types sont finis)

Plusieurs types possibles

on peut montrer

$$\emptyset \vdash \texttt{fun}\ x \to x : \texttt{int} \to \texttt{int}$$

mais aussi

$$\emptyset \vdash \texttt{fun}\ x \to x : \texttt{bool} \to \texttt{bool}$$

attention : ce n'est pas du polymorphisme
pour une occurrence donnée de $\texttt{fun}\ x \to x$ il faut choisir un type

ainsi, le terme $\texttt{let}\ f = \texttt{fun}\ x \to x\ \texttt{in}\ (f\ 1, f\ \texttt{true})$ n'est pas typable car il n'y a pas de type τ tel que

$$f : \tau \to \tau \vdash (f\ 1, f\ \texttt{true}) : \tau_1 \times \tau_2$$

Primitives

en particulier, on ne peut pas donner un type satisfaisant à une primitive comme `fst` ; il faudrait choisir entre

$$\begin{array}{l}\texttt{int} \times \texttt{int} \to \texttt{int}\\ \texttt{int} \times \texttt{bool} \to \texttt{int}\\ \texttt{bool} \times \texttt{int} \to \texttt{bool}\\ (\texttt{int} \to \texttt{int}) \times \texttt{int} \to \texttt{int} \to \texttt{int}\\ \text{etc.}\end{array}$$

de même pour les primitives *opif* et *opfix*

Fonction récursive

on ne peut pas donner de type à *opfix* de manière générale, mais on peut donner une règle de typage pour une construction `let rec` qui serait primitive

$$\frac{\Gamma + x : \tau_1 \vdash e_1 : \tau_1 \qquad \Gamma + x : \tau_1 \vdash e_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash \texttt{let rec}\ x = e_1\ \texttt{in}\ e_2 : \tau_2}$$

et si on souhaite exclure les *valeurs* récursives, on peut modifier ainsi

$$\frac{\Gamma + (f : \tau \to \tau_1) + (x : \tau) \vdash e_1 : \tau_1 \qquad \Gamma + (f : \tau \to \tau_1) \vdash e_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash \texttt{let rec}\ f\ x = e_1\ \texttt{in}\ e_2 : \tau_2}$$

Différence entre règles de typage et algorithme de typage

quand on type $\texttt{fun}\ x \to e$, comment trouve-t-on le type à donner à x ?

c'est toute la différence entre les **règles de typage**, qui définissent la relation ternaire

$$\Gamma \vdash e : \tau$$

et l'**algorithme de typage** qui vérifie qu'une certaine expression e est bien typée dans un certain environnement Γ

Typage simple de mini-ML

considérons l'approche où seuls les paramètres de fonctions sont annotés et programmons-la en Caml

syntaxe abstraite des types

```
type typ =
  | Tint
  | Tarrow of typ × typ
  | Tproduct of typ × typ
```


Typage simple de mini-ML

le constructeur `Fun` prend un argument supplémentaire

```
type expression =
  | Var of string
  | Const of int
  | Op of string
  | Fun of string × typ × expression     (* seul changement *)
  | App of expression × expression
  | Pair of expression × expression
  | Let of string × expression × expression
```


Typage simple de mini-ML

l'environnement Γ est réalisé par une structure persistante

en l'occurrence on utilise le module `Map` de Caml

```
module Smap = Map.Make(String)

type env = typ Smap.t
```

performances : arbres équilibrés $\Rightarrow$ insertion et recherche en $O(\log n)$

Typage simple de mini-ML

```
let rec type_expr env = function
  | Const _ → Tint
  | Var x → Smap.find x env
  | Op "+" → Tarrow (Tproduct (Tint, Tint), Tint)
  | Pair (e1, e2) →
      Tproduct (type_expr env e1, type_expr env e2)
```

pour la fonction, le type de la variable est donné

```
  | Fun (x, ty, e) →
      Tarrow (ty, type_expr (Smap.add x ty env) e)
```

pour la variable locale, il est calculé

```
  | Let (x, e1, e2) →
      type_expr (Smap.add x (type_expr env e1) env) e2
```

(noter l'intérêt de la persistance de env)

Typage simple de mini-ML

les seules vérifications se trouvent dans l'application

```
  | App (e1, e2) → begin match type_expr env e1 with
      | Tarrow (ty2, ty) →
          if type_expr env e2 = ty2 then ty
          else failwith "mal typé : argument de mauvais type"
      | _ →
          failwith "mal typé : fonction attendue"
    end
```


Typage simple de mini-ML

exemples

```
# typeof (Let ("f",
                Fun ("x", Tint, App (Op "+", Pair (Var "x", Co
                App (Var "f", Const 2)));;
```

```
- : typ = Tint
```

```
# typeof (Fun ("x", Tint, App (Var "x", Var "x")));;
```

```
Exception: Failure "mal typé : fonction attendue".
```

```
# typeof (App (App (Op "+", Const 1), Const 2));;
```

```
Exception: Failure "mal typé : argument de mauvais type".
```


Sûreté du typage

on montre l'adéquation du typage par rapport à la sémantique à réductions

Théorème (sûreté du typage)

Si $\emptyset \vdash e : \tau$, alors la réduction de e est infinie ou se termine sur une valeur.

ou, de manière équivalente,

Théorème

Si $\emptyset \vdash e : \tau$ et $e \xrightarrow{\star} e'$ et e' irréductible, alors e' est une valeur.

Sûreté du typage

la preuve de ce théorème s'appuie sur deux lemmes

Lemme (progression)

Si $\emptyset \vdash e : \tau$, alors soit e est une valeur, soit il existe e' tel que $e \longrightarrow e'$.

Lemme (préservation)

Si $\emptyset \vdash e : \tau$ et $e \longrightarrow e'$ alors $\emptyset \vdash e' : \tau$.

Progression

Lemme (progression)

Si $\emptyset \vdash e : \tau$, alors soit e est une valeur, soit il existe e' tel que $e \to e'$.

Preuve : par récurrence sur la dérivation $\emptyset \vdash e : \tau$

supposons par exemple $e = e_1\ e_2$; on a donc

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau' \to \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau'}{\Gamma \vdash e_1\ e_2 : \tau}$$

on applique l'HR à e_1

- si $e_1 \to e_1'$, alors $e = e_1\ e_2 \to e_1'\ e_2$ (cf lemme passage au contexte)
- si e_1 est une valeur, supposons $e_1 = \texttt{fun}\ x \to e_3$ (il y a aussi + etc.)
  on applique l'HR à e_2
  - si $e_2 \to e_2'$, alors $e = e_1\ e_2 \to e_1\ e_2'$ (même lemme)
  - si e_2 est une valeur, alors $e = e_1\ e_2 \to e_3[x \leftarrow e_2]$

(exercice : traiter les autres cas) □

Préservation

on commence par de petits lemmes faciles

Lemme (permutation)

Si $\Gamma + x : \tau_1 + y : \tau_2 \vdash e : \tau$ et $x \neq y$ alors $\Gamma + y : \tau_2 + x : \tau_1 \vdash e : \tau$
(et la dérivation a la même hauteur).

preuve : récurrence immédiate □

Lemme (affaiblissement)

Si $\Gamma \vdash e : \tau$ et $x \notin dom(\Gamma)$, alors $\Gamma + x : \tau' \vdash e : \tau$
(et la dérivation a la même hauteur).

preuve : récurrence immédiate □

Préservation

on continue par un **lemme clé**

Lemme (préservation par substitution)

Si $\Gamma + x : \tau' \vdash e : \tau$ et $\Gamma \vdash e' : \tau'$ alors $\Gamma \vdash e[x \leftarrow e'] : \tau$.

preuve : par récurrence sur la dérivation $\Gamma + x : \tau' \vdash e : \tau$

- cas d'une variable $e = y$
  - si $x = y$ alors $e[x \leftarrow e'] = e'$ et $\tau = \tau'$
  - si $x \neq y$ alors $e[x \leftarrow e'] = e$ et $\tau = \Gamma(y)$
- cas d'une abstraction $e = \texttt{fun}\ y \to e_1$
  on peut supposer $y \neq x$, $y \notin dom(\Gamma)$ et y non libre dans e'
  on a $\Gamma + x : \tau' + y : \tau_2 \vdash e_1 : \tau_1$ et donc $\Gamma + y : \tau_2 + x : \tau' \vdash e_1 : \tau_1$ (permutation) ; d'autre part $\Gamma \vdash e' : \tau'$ et donc $\Gamma + y : \tau_2 \vdash e' : \tau'$ (affaiblissement)
  par HR on a donc $\Gamma + y : \tau_2 \vdash e_1[x \leftarrow e'] : \tau_1$
  et donc $\Gamma \vdash (\texttt{fun}\ y \to e_1)[x \leftarrow e'] : \tau_2 \to \tau_1$, *i.e.* $\Gamma \vdash e[x \leftarrow e'] : \tau$

(exercice : traiter les autres cas) □

Préservation

on peut enfin montrer

Lemme (préservation)

Si $\emptyset \vdash e : \tau$ et $e \to e'$ alors $\emptyset \vdash e' : \tau$.

preuve : par récurrence sur la dérivation $\emptyset \vdash e : \tau$

- cas $e = \texttt{let}\ x = e_1\ \texttt{in}\ e_2$

$$\frac{\emptyset \vdash e_1 : \tau_1 \qquad x : \tau_1 \vdash e_2 : \tau_2}{\emptyset \vdash \texttt{let}\ x = e_1\ \texttt{in}\ e_2 : \tau_2}$$

  - si $e_1 \to e_1'$, par HR on a $\emptyset \vdash e_1' : \tau_1$ et donc $\emptyset \vdash \texttt{let}\ x = e_1'\ \texttt{in}\ e_2 : \tau_2$
  - si e_1 est une valeur et $e' = e_2[x \leftarrow e_1]$ alors on applique le lemme de préservation par substitution
- cas $e = e_1\ e_2$
  - si $e_1 \to e_1'$ ou si e_1 valeur et $e_2 \to e_2'$ alors on utilise l'HR
  - si $e_1 = \texttt{fun}\ x \to e_3$ et e_2 valeur alors $e' = e_3[x \leftarrow e_2]$ et on applique là encore le lemme de substitution □

Sûreté du typage

on peut maintenant prouver le théorème facilement

Théorème (sûreté du typage)

Si $\emptyset \vdash e : \tau$ et $e \xrightarrow{\star} e'$ et e' irréductible, alors e' est une valeur.

preuve : on a $e \to e_1 \to \cdots \to e'$ et par applications répétées du lemme de préservation, on a donc $\emptyset \vdash e' : \tau$
par le lemme de progression, e' se réduit ou est une valeur
c'est donc une valeur □

Polymorphisme

il est contraignant de donner un type unique à `fun` $x \to x$ dans

$$\texttt{let } f = \texttt{fun } x \to x \texttt{ in } \ldots$$

de même, on aimerait pouvoir donner « plusieurs types » aux primitives telles que `fst` ou `snd`

une solution : le **polymorphisme paramétrique**

Polymorphisme paramétrique

on étend l'algèbre des types :

$$\begin{array}{rcll} \tau & ::= & \texttt{int} \mid \texttt{bool} \mid \ldots & \textit{types de base} \\ & \mid & \tau \to \tau & \textit{type d'une fonction} \\ & \mid & \tau \times \tau & \textit{type d'une paire} \\ & \mid & \alpha & \textit{variable de type} \\ & \mid & \forall \alpha.\tau & \textit{type polymorphe} \end{array}$$

Système F

les règles sont **exactement** les mêmes qu'auparavant, plus

$$\frac{\Gamma \vdash e : \tau \qquad \alpha \notin \mathcal{L}(\Gamma)}{\Gamma \vdash e : \forall \alpha.\tau}$$

et

$$\frac{\Gamma \vdash e : \forall \alpha.\tau}{\Gamma \vdash e : \tau[\alpha \leftarrow \tau']}$$

le système obtenu s'appelle le **système F** (J.-Y. Girard / J. C. Reynolds)

Variables de types libres

dans la règle

$$\frac{\Gamma \vdash e : \tau \qquad \alpha \notin \mathcal{L}(\Gamma)}{\Gamma \vdash e : \forall\alpha.\tau}$$

$\mathcal{L}(\Gamma)$ dénote l'ensemble des variables de types **libres** dans Γ, défini par

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \bigcup_{x \in dom(\Gamma)} \mathcal{L}(\Gamma(x))$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\texttt{int}) &= \emptyset \\
\mathcal{L}(\alpha) &= \{\alpha\} \\
\mathcal{L}(\tau_1 \to \tau_2) &= \mathcal{L}(\tau_1) \cup \mathcal{L}(\tau_2) \\
\mathcal{L}(\tau_1 \times \tau_2) &= \mathcal{L}(\tau_1) \cup \mathcal{L}(\tau_2) \\
\mathcal{L}(\forall\alpha.\tau) &= \mathcal{L}(\tau) \setminus \{\alpha\}
\end{aligned}$$

Exemple

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \alpha \vdash x : \alpha}{\vdash \texttt{fun}\ x \to x : \alpha \to \alpha}}{\vdash \texttt{fun}\ x \to x : \forall\alpha.\alpha \to \alpha} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\ldots \vdash f : \forall\alpha.\alpha \to \alpha}{\ldots \vdash f : \texttt{int} \to \texttt{int}}}{\ldots \vdash f\ 1 : \texttt{int}} \quad \vdots \qquad \dfrac{\vdots}{\ldots \vdash f\ \texttt{true} : \texttt{bool}}}{f : \forall\alpha.\alpha \to \alpha \vdash (f\ 1, f\ \texttt{true}) : \texttt{int} \times \texttt{bool}}}{\vdash \texttt{let}\ f = \texttt{fun}\ x \to x\ \texttt{in}\ (f\ 1, f\ \texttt{true})}$$

Primitives

on peut maintenant donner un type satisfaisant aux primitives

$$\begin{aligned}
\mathit{fst} &: \quad \forall\alpha.\forall\beta.\alpha \times \beta \to \alpha \\
\mathit{snd} &: \quad \forall\alpha.\forall\beta.\alpha \times \beta \to \beta \\
\mathit{opif} &: \quad \forall\alpha.\texttt{bool} \times \alpha \times \alpha \to \alpha \\
\mathit{opfix} &: \quad \forall\alpha.(\alpha \to \alpha) \to \alpha
\end{aligned}$$

Exercice

on peut construire une dérivation de

$$\Gamma \vdash \texttt{fun}\ x \to x\ x : (\forall\alpha.\alpha \to \alpha) \to (\forall\alpha.\alpha \to \alpha)$$

(exercice : le faire)

Remarque

la condition $\alpha \notin \mathcal{L}(\Gamma)$ dans la règle

$$\frac{\Gamma \vdash e : \tau \qquad \alpha \notin \mathcal{L}(\Gamma)}{\Gamma \vdash e : \forall \alpha.\tau}$$

est cruciale

sans elle, on aurait

$$\frac{\dfrac{\Gamma + x : \alpha \vdash x : \alpha}{\Gamma + x : \alpha \vdash x : \forall \alpha.\alpha}}{\Gamma \vdash \texttt{fun}\ x \to x : \alpha \to \forall \alpha.\alpha}$$

et on accepterait donc le programme

$$(\texttt{fun}\ x \to x)\ 1\ 2$$

Une mauvaise nouvelle

problème : l'inférence de type dans le système F n'est pas décidable

même si e et τ sont donnés, il n'est pas possible de vérifier si $\vdash e : \tau$ (pour un terme e sans annotations)

pour obtenir une inférence de types décidable, on va restreindre la puissance du système F $\Rightarrow$ le système de **Hindley-Milner**, utilisé dans Caml, SML, Haskell, ...

Le système de Hindley-Milner

on limite la quantification $\forall$ en tête des types (quantification prénexe)

$$\begin{array}{rcll} \tau & ::= & \texttt{int} \mid \texttt{bool} \mid \ldots & \textit{types de base} \\ & \mid & \tau \to \tau & \textit{type d'une fonction} \\ & \mid & \tau \times \tau & \textit{type d'une paire} \\ & \mid & \alpha & \textit{variable de type} \\ \\ \sigma & ::= & \tau & \textit{schémas} \\ & \mid & \forall \alpha.\sigma & \end{array}$$

l'environnement Γ associe un schéma de type à chaque identificateur et la relation de typage a maintenant la forme $\Gamma \vdash x : \sigma$

Exemples

dans Hindley-Milner, les types suivants sont toujours acceptés

$$\begin{array}{l} \forall \alpha.\alpha \to \alpha \\ \forall \alpha.\forall \beta.\alpha \times \beta \to \alpha \\ \forall \alpha.\texttt{bool} \times \alpha \times \alpha \to \alpha \\ \forall \alpha.(\alpha \to \alpha) \to \alpha \end{array}$$

mais plus les types tels que

$$(\forall \alpha.\alpha \to \alpha) \to (\forall \alpha.\alpha \to \alpha)$$

Notation en Caml

note : dans la syntaxe d'Ocaml, la quantification prénexe est implicite

```
# fst;;
- : 'a * 'b -> 'a = <fun>

# List.fold_left;;
- : ('a -> 'b -> 'a) -> 'a -> 'b list -> 'a = <fun>
```


Le système de Hindley-Milner

$$\frac{}{\Gamma \vdash x : \Gamma(x)} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash n : \texttt{int}} \ldots \qquad \frac{}{\Gamma \vdash + : \texttt{int} \times \texttt{int} \to \texttt{int}} \ldots$$

$$\frac{\Gamma + x : \tau_1 \vdash e : \tau_2}{\Gamma \vdash \texttt{fun}\ x \to e : \tau_1 \to \tau_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau' \to \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau'}{\Gamma \vdash e_1\ e_2 : \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash (e_1, e_2) : \tau_1 \times \tau_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \sigma_1 \quad \Gamma + x : \sigma_1 \vdash e_2 : \sigma_2}{\Gamma \vdash \texttt{let}\ x = e_1\ \texttt{in}\ e_2 : \sigma_2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : \sigma \qquad \alpha \notin \mathcal{L}(\Gamma)}{\Gamma \vdash e : \forall \alpha.\sigma} \qquad \frac{\Gamma \vdash e : \forall \alpha.\sigma}{\Gamma \vdash e : \sigma[\alpha \leftarrow \tau]}$$

Le système de Hindley-Milner

on note que seule la construction `let` permet d'introduire un type polymorphe dans l'environnement

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \sigma_1 \qquad \Gamma + x : \sigma_1 \vdash e_2 : \sigma_2}{\Gamma \vdash \texttt{let}\ x = e_1\ \texttt{in}\ e_2 : \sigma_2}$$

en particulier, on peut toujours typer

$$\texttt{let}\ f = \texttt{fun}\ x \to x\ \texttt{in}\ (f\ 1, f\ \texttt{true})$$

avec $f : \forall \alpha.\alpha \to \alpha$ dans le contexte pour typer $(f\ 1, f\ \texttt{true})$

Le système de Hindley-Milner

en revanche, la règle de typage

$$\frac{\Gamma + x : \tau_1 \vdash e : \tau_2}{\Gamma \vdash \texttt{fun}\ x \to e : \tau_1 \to \tau_2}$$

n'introduit pas un type polymorphe (sinon $\tau_1 \to \tau_2$ serait mal formé)

en particulier, on ne peut plus typer

$$\texttt{fun}\ x \to x\ x$$

Considérations algorithmiques

pour programmer une vérification ou une inférence de type, on procède par récurrence sur la structure du programme

or pour une expression donnée, trois règles peuvent s'appliquer : la règle du système monomorphe, la règle

$$\frac{\Gamma \vdash e : \sigma \qquad \alpha \notin \mathcal{L}(\Gamma)}{\Gamma \vdash e : \forall\alpha.\sigma}$$

ou encore la règle

$$\frac{\Gamma \vdash e : \forall\alpha.\sigma}{\Gamma \vdash e : \sigma[\alpha \leftarrow \tau]}$$

comment choisir ? va-t-on devoir procéder par retour en arrière ?

Système de Hindley-Milner dirigé par la syntaxe

nous allons modifier la présentation du système de Hindley-Milner pour qu'il soit **dirigé par la syntaxe** (*syntax-directed*), *i.e.*, pour toute expression, au plus une règle s'applique

les règles ont la même puissance d'expression : tout terme clos est typable dans un système si et seulement si il est typable dans l'autre

Système de Hindley-Milner dirigé par la syntaxe

$$\frac{\tau \leq \Gamma(x)}{\Gamma \vdash x : \tau} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash n : \texttt{int}}\ldots \qquad \frac{\tau \leq \mathit{type}(op)}{\Gamma \vdash op : \tau}$$

$$\frac{\Gamma + x : \tau_1 \vdash e : \tau_2}{\Gamma \vdash \texttt{fun}\ x \to e : \tau_1 \to \tau_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau' \to \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau'}{\Gamma \vdash e_1\ e_2 : \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash (e_1, e_2) : \tau_1 \times \tau_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \quad \Gamma + x : \mathit{Gen}(\tau_1, \Gamma) \vdash e_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash \texttt{let}\ x = e_1\ \texttt{in}\ e_2 : \tau_2}$$

Système de Hindley-Milner dirigé par la syntaxe

deux opérations apparaissent

- l'**instanciation**, dans la règle

$$\frac{\tau \leq \Gamma(x)}{\Gamma \vdash x : \tau}$$

la relation $\tau \leq \sigma$ se lit « τ est une instance de σ » et est définie par

$$\tau \leq \forall\alpha_1 \ldots \alpha_n.\tau' \quad \text{ssi} \quad \exists\tau_1 \ldots \exists\tau_n.\ \tau = \tau'[\alpha_1 \leftarrow \tau_1, \ldots, \alpha_n \leftarrow \tau_n]$$

exemple : $\texttt{int} \times \texttt{bool} \to \texttt{int} \leq \forall\alpha.\forall\beta.\alpha \times \beta \to \alpha$

Système de Hindley-Milner dirigé par la syntaxe

- et la **généralisation**, dans la règle

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \qquad \Gamma + x : \mathit{Gen}(\tau_1, \Gamma) \vdash e_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash \texttt{let}\ x = e_1\ \texttt{in}\ e_2 : \tau_2}$$

où

$$\mathit{Gen}(\tau_1, \Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \forall\alpha_1 ... \forall\alpha_n.\tau_1 \quad \text{où} \quad \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} = \mathcal{L}(\tau_1) \backslash \mathcal{L}(\Gamma)$$

Exemple

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\alpha \leq \alpha}}{\Gamma + x : \alpha \vdash x : \alpha}}{\Gamma \vdash \texttt{fun}\ x \to x : \alpha \to \alpha} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\texttt{int}\to\texttt{int} \leq \forall\alpha.\alpha\to\alpha}{\Gamma' \vdash f : \texttt{int}\to\texttt{int}} \quad \vdots}{\Gamma' \vdash f\ 1 : \texttt{int}} \qquad \dfrac{\dfrac{\texttt{bool}\to\texttt{bool} \leq \forall\alpha.\alpha\to\alpha}{\Gamma' \vdash f : \texttt{bool}\to\texttt{bool}} \quad \vdots}{\Gamma' \vdash f\ \texttt{true} : \texttt{bool}}}{\Gamma' \vdash (f\ 1, f\ \texttt{true}) : \texttt{int} \times \texttt{bool}}$$

$$\Gamma \vdash \texttt{let}\ f = \texttt{fun}\ x \to x\ \texttt{in}\ (f\ 1, f\ \texttt{true})$$

avec $\Gamma' = \Gamma + f : \mathit{Gen}(\alpha \to \alpha, \Gamma) = \Gamma + f : \forall\alpha.\alpha \to \alpha$
si α est choisie non libre dans Γ

Inférence de types pour mini-ML

pour inférer le type d'une expression, il reste des problèmes

- dans `fun` $x \to e$, quel type donner à x ?
- pour une variable x, quelle instance de $\Gamma(x)$ choisir ?

il existe une solution : **l'algorithme W** (Milner, Damas, Tofte)

L'algorithme W

deux idées

- on utilise de **nouvelles variables de types** pour représenter les types inconnus
  - pour le type de x dans `fun` $x \to e$
  - pour instancier les variables du schéma $\Gamma(x)$
- on détermine la valeur de ces variables plus tard, par **unification entre types** au moment du typage de l'application

Unification

soient deux types τ_1 et τ_2 contenant des variables de types $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

existe-t-il une instanciation f des variables α_i telle que $f(\tau_1) = f(\tau_2)$?

on appelle cela l'**unification**

exemple 1 :

$$\tau_1 = \alpha \times \beta \to \texttt{int}$$
$$\tau_2 = \texttt{int} \times \texttt{bool} \to \gamma$$
solution : $\alpha = \texttt{int} \ \wedge \ \beta = \texttt{bool} \ \wedge \ \gamma = \texttt{int}$

exemple 2 :

$$\tau_1 = \alpha \times \texttt{int} \to \alpha \times \texttt{int}$$
$$\tau_2 = \gamma \to \gamma$$
solution : $\gamma = \alpha \times \texttt{int}$

Unification

exemple 3 :

$$\tau_1 = \alpha \to \texttt{int}$$
$$\tau_2 = \beta \times \gamma$$
pas de solution

exemple 4 :

$$\tau_1 = \alpha \to \texttt{int}$$
$$\tau_2 = \alpha$$
pas de solution

Pseudo-code de l'unification

unifier(τ_1, τ_2) détermine s'il existe une instance des variables de types de τ_1 et τ_2 telle que $\tau_1 = \tau_2$

$$\textit{unifier}(\tau, \tau) = \text{succès}$$
$$\textit{unifier}(\tau_1 \to \tau_1', \tau_2 \to \tau_2') = \textit{unifier}(\tau_1, \tau_2) \ ; \ \textit{unifier}(\tau_1', \tau_2')$$
$$\textit{unifier}(\tau_1 \times \tau_1', \tau_2 \times \tau_2') = \textit{unifier}(\tau_1, \tau_2) \ ; \ \textit{unifier}(\tau_1', \tau_2')$$
$$\textit{unifier}(\alpha, \tau) = \begin{array}{l}\text{si } \alpha \notin \mathcal{L}(\tau), \text{ remplacer } \alpha \text{ par } \tau \text{ partout} \\ \text{sinon, échec}\end{array}$$
$$\textit{unifier}(\tau, \alpha) = \textit{unifier}(\alpha, \tau)$$
$$\textit{unifier}(\tau_1, \tau_2) = \text{échec dans tous les autres cas}$$

(pas de panique : on le fera en TD)

L'idée de l'algorithme W sur un exemple

considérons l'expression $\boxed{\texttt{fun } x \to +(\textit{fst } x, 1)}$

– à x on donne le type α_1, nouvelle variable de type

– la primitive $+$ a le type $\texttt{int} \times \texttt{int} \to \texttt{int}$

– typons l'expression $(\textit{fst } x, 1)$

  – *fst* a pour type le schéma $\forall\alpha.\forall\beta.\alpha \times \beta \to \alpha$

  – on lui donne donc le type $\alpha_2 \times \beta_1 \to \alpha_2$ pour deux nouvelles variables

  – l'application *fst* x impose d'unifier α_1 et $\alpha_2 \times \beta_1$, $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \times \beta_1$

– $(\textit{fst } x, 1)$ a donc le type $\alpha_2 \times \texttt{int}$

– l'application $+(\textit{fst } x, 1)$ unifie $\texttt{int} \times \texttt{int}$ et $\alpha_2 \times \texttt{int}$, $\Rightarrow \alpha_2 = \texttt{int}$

au final, on obtient le type $\texttt{int} \times \beta_1 \to \texttt{int}$,
et en généralisant on obtient finalement $\boxed{\forall\beta.\texttt{int} \times \beta \to \texttt{int}}$

Pseudo-code de l'algorithme W

on définit une fonction W qui prend en argument un environnement Γ et une expression e, et retourne le type inféré pour e

- si e est une variable x,
  renvoyer une instance triviale de $\Gamma(x)$
- si e est une constante c,
  renvoyer une instance triviale de son type (penser à $[] : \alpha$ `list`)
- si e est une primitive op,
  renvoyer une instance triviale de son type
- si e est une paire (e_1, e_2),
  calculer $\tau_1 = W(\Gamma, e_1)$
  calculer $\tau_2 = W(\Gamma, e_2)$
  renvoyer $\tau_1 \times \tau_2$

L'algorithme W

- si e est une fonction `fun` $x \rightarrow e_1$,
  soit α une nouvelle variable
  calculer $\tau = W(\Gamma + x : \alpha, e_1)$
  renvoyer $\alpha \rightarrow \tau$
- si e est une application $e_1\ e_2$,
  calculer $\tau_1 = W(\Gamma, e_1)$
  calculer $\tau_2 = W(\Gamma, e_2)$
  soit α une nouvelle variable
  unifier(τ_1, $\tau_2 \rightarrow \alpha$)
  renvoyer α
- si e est `let` $x = e_1$ `in` e_2,
  calculer $\tau_1 = W(\Gamma, e_1)$
  renvoyer $W(\Gamma + x : Gen(\tau_1, \Gamma), e_2)$

Résultats

Théorème (Damas, Milner, 1982)

L'algorithme W est correct, complet et détermine le type principal :

- *si* $W(\emptyset, e) = \tau$ *alors* $\emptyset \vdash e : \tau$
- *si* $\emptyset \vdash e : \tau$ *alors* $\tau \leq \forall \bar{\alpha}.W(\emptyset, e)$

Théorème (sûreté du typage)

Le système de Hindley-Milner est sûr.
(Si $\emptyset \vdash e : \tau$, alors la réduction de e est infinie ou se termine sur une valeur.)

Considérations algorithmiques

il existe plusieurs façons de réaliser l'unification

- en manipulant explicitement une **substitution**

```
type tvar = int
type subst = typ TVmap.t
```

- en utilisant des variables de types **destructives**

```
type tvar = { id : int; mutable def : typ option; }
```

il existe également plusieurs façons de coder l'algorithme W

- avec des **schémas explicites** et en calculant $Gen(\tau, \Gamma)$

```
type schema = { tvars : TVset.t; typ : typ; }
```

- avec des **niveaux**

$$\frac{\Gamma \vdash_{n+1} e_1 : \tau_1 \qquad \Gamma + x : (\tau_1, n) \vdash_n e_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash_n \texttt{let}\ x = e_1\ \texttt{in}\ e_2 : \tau_2}$$

cf. TD 4

Extensions

on peut étendre mini-ML de nombreuses façons

- récursion
- types construits (n-uplets, listes, types sommes et produits)
- références

Récursion

comme déjà expliqué, on peut définir

$$\texttt{let rec } f\ x = e_1 \texttt{ in } e_2 \stackrel{\text{def}}{=} \texttt{let } f = \mathit{opfix}\ (\texttt{fun } f \to \texttt{fun } x \to e_1) \texttt{ in } e_2$$

où

$$\mathit{opfix} : \forall\alpha.\forall\beta.((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$$

de manière équivalente, on peut donner la règle

$$\frac{\Gamma + f : \tau \to \tau_1 + x : \tau \vdash e_1 : \tau_1 \qquad \Gamma + f : \tau \to \tau_1 \vdash e_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash \texttt{let rec } f\ x = e_1 \texttt{ in } e_2 : \tau_2}$$

Types construits

on a déjà vu les paires

les listes ne posent pas de difficulté

$$\begin{aligned} \mathit{nil} &: \forall\alpha.\alpha\ \mathit{list} \\ \mathit{cons} &: \forall\alpha.\alpha \times \alpha\ \mathit{list} \to \alpha\ \mathit{list} \end{aligned}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1\ \mathit{list} \qquad \Gamma \vdash e_2 : \tau \qquad \Gamma + x : \tau_1 + y : \tau_1\ \mathit{list} \vdash e_3 : \tau}{\Gamma \vdash \texttt{match } e_1 \texttt{ with } \mathit{nil} \to e_2 \mid \mathit{cons}(x, y) \to e_3 : \tau}$$

(cf. le projet)

se généralise aisément aux types sommes et produits

Références

pour les références, on peut naïvement penser qu'il suffit d'ajouter les primitives

$$\begin{aligned} \mathit{ref} &: \forall\alpha.\alpha \to \alpha\ \mathit{ref} \\ ! &: \forall\alpha.\alpha\ \mathit{ref} \to \alpha \\ := &: \forall\alpha.\alpha\ \mathit{ref} \to \alpha \to \mathit{unit} \end{aligned}$$

malheureusement, c'est incorrect !

$$\begin{array}{ll} \texttt{let } r = \mathit{ref}\ (\texttt{fun } x \to x) \texttt{ in} & r : \forall\alpha.(\alpha \to \alpha)\ \mathit{ref} \\ \texttt{let } _ = r := (\texttt{fun } x \to x + 1) \texttt{ in} & \\ !r\ \texttt{true} & \mathit{boum}\ ! \end{array}$$

c'est le problème dit des **références polymorphes**

pour contourner ce problème, il existe une solution extrêmement simple, à savoir une restriction syntaxique de la construction `let`

Définition (*value restriction*, Wright 1995)

Un programme satisfait le critère de la **value restriction** *si toute sous-expression* `let` *est de la forme*

$$\texttt{let } x = v_1 \texttt{ in } e_2$$

où v_1 *est une valeur.*

on ne peut plus écrire

$$\texttt{let } r = \textit{ref } (\texttt{fun } x \to x) \texttt{ in } \ldots$$

mais on peut écrire en revanche

$$(\texttt{fun } r \to \ldots)\ (\textit{ref } (\texttt{fun } x \to x))$$

où le type de r n'est pas généralisé

en pratique, on continue d'écrire `let` r = *ref* `...` `in` `...`
mais le type de r n'est pas généralisé

en Caml, une variable non généralisée est de la forme `'_a`

```
# let x = ref (fun x → x);;
```

```
val x : ('_a -> '_a) ref
```

la *value restriction* est également légèrement relâchée pour autoriser des expressions sûres, telles que des applications de constructeurs

```
# let l = [fun x → x];;
```

```
val l : ('a -> 'a) list = [<fun>]
```


il reste quelques petits désagréments

```
# let id x = x;;
```

```
val id : 'a -> 'a = <fun>
```

```
# let f = id id;;
```

```
val f : '_a -> '_a = <fun>
```

```
# f 1;;
```

```
- : int = 1
```

```
# f true;;
```

```
This expression has type bool but is here used with type in
```

```
# f;;
```

Références polymorphes

la solution : expanser pour faire apparaître une fonction, *i.e.*, une valeur

```
# let f x = id id x;;

val f : 'a -> 'a = <fun>
```

(on parle d'η-expansion)

Références polymorphes

en présence du système de modules, la réalité est plus complexe encore

étant donné un module `M`

```
module M : sig
  type α t
  val create : int → α t
end
```

ai-je le droit de généraliser le type de `M.create 17` ?

la réponse dépend du type `'a t` : non pour une table de hachage, oui pour une liste pure, etc.

en Caml, une indication de **variance** permet de distinguer les deux

```
type +α t   (* on peut généraliser *)
type  α u   (* on ne peut pas *)
```

lire *Relaxing the value restriction*, J. Garrigue, 2004

Lecture

deux ouvrages en rapport avec ce cours

- Benjamin C. Pierce, *Types and Programming Languages*
  (également en rapport avec le cours 3)
- Xavier Leroy et Pierre Weis, *Le langage Caml*
  (le dernier chapitre explique l'inférence avec les niveaux)

La suite

- ni cours ni TD la semaine prochaine
- TD 4 le 4 novembre
  - unification et algorithme W
- Cours 5 le 5 novembre
  - Analyse lexicale

Remerciements

ce cours reprend des notes de cours de Xavier Leroy
(cours de remise à niveau « Programmation, sémantique, typage »)