

Outils logiques et algorithmiques – TD 6 – Correction

Exercice 1

1. Vrai
2. Faux

Exercice 2

1. R réflexive car pour tout x , $f(x) = f(x)$. R symétrique car si $f(x) = f(y)$ alors $f(y) = f(x)$. Transitivité : supposons xRy et yRz . Alors $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$ et donc $f(x) = f(z)$. D'où xRz . Les classes d'équivalence sont les ensembles d'antécédents des éléments de B .
2. La relation \subseteq n'est pas symétrique. Par exemple $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$ mais $\mathbb{N} \not\subseteq \emptyset$.

Exercice 3

1. La composante connexe de a contient a et est donc non vide. Tout sommet appartient à sa composante connexe. Si un sommet a appartient à la composante connexe de b alors il y a un chemin de a à b et tout élément de la composante connexe de a est aussi relié à b et donc dans la composante connexe de b . On a aussi que il y a un chemin de b à a et donc les deux composantes connexes de a et de b sont égales.
Si l'intersection des composantes connexes de a et de b est non vide, appelons x un élément de cette intersection, on a alors $C(b) = C(x) = C(a)$ et donc les deux composantes sont égales.
2. Il y a au maximum une composante par sommet (s'il n'y a pas d'arêtes) et donc n composantes et au minimum 1 (graphe fortement connexe).
3. Il y a deux cas, si a et b sont dans deux composantes connexes différentes alors l'ajout d'une arête entre les deux fait diminuer le nombre de composantes de 1 : on a $C_{G'}(a) = C_G(a) \cup C_G(b)$ et $C_{G'}(c) = C_G(c)$ pour tout $c \notin C_G(a) \cup C_G(b)$. Si maintenant on a a et b qui étaient dans la même composante connexe alors il y avait un chemin de a à b dans le graphe G , en ajoutant la nouvelle arête on a un cycle qui passe par a .
4. Si on prend un graphe à n sommets sans arêtes il y a n composantes connexes. A chaque fois que l'on ajoute une arête sans ajouter de cycle, on diminue d'un le nombre de composantes connexes et donc après avoir ajouter $n - 1$ arêtes il ne reste plus qu'une composante connexe et donc on peut plus ajouter d'arête sans créer de cycle.

Exercice 4

1. Trois composantes : $\{a, b, e\}$, $\{f\}$ et $\{c, d, g, h\}$.
2. Comme s_1 (resp. s_2) est dans la composante fortement de s , on en déduit un chemin de s_1 vers s (resp. de s vers s_2). Par concaténation de ces deux chemins on obtient un chemin de s_1 vers s_2 .
3. On a trois arêtes $\{a, b, e\} \rightarrow \{f\}$, $\{a, b, e\} \rightarrow \{c, d, g, h\}$ et $\{c, d, g, h\} \rightarrow \{f\}$.
4. Récurrence sur k .
 - Cas $k = 0$. On parle d'un chemin vide dont le départ et l'arrivée sont la même composante, disons C . Soient s_1 et s_2 dans C , par le résultat précédent on a bien un chemin de s_1 vers s_2 .
 - Cas $k + 1$. Soit k tel que la propriété soit vraie. Soit un chemin ρ de longueur $k + 1$ dans le graphe des composantes $C(G)$ et soit s_1 (resp. s_2) un sommet dans la composante de départ $C_1 = \sigma(\rho)$ (resp. d'arrivée $C_2 = \tau(\rho)$).
Le chemin ρ se décompose en une arête de C_1 vers une autre composante C_3 , et un chemin de longueur k de C_3 vers C_2 . Par définition il existe deux sommets $s'_1 \in C_1$ et $s_3 \in C_3$ tels qu'il y ait une arête de s'_1 vers s_3 dans G . Par hypothèse de récurrence on a dans G un chemin ρ_2 de s_3 vers s_2 de longueur au moins k . Par propriété des composantes fortement connexes on a dans G un chemin ρ_1 (de longueur éventuellement nulle) de s_1 vers s'_1 . On combine alors ρ_1 , l'arête de s'_1 à s_3 et ρ_2 pour obtenir un chemin de s_1 à s_2 dans G , de longueur au moins $k + 1$.

5. Supposons qu'il existe un cycle ρ dans le graphe des composantes $C(G)$. On note C_1 et C_2 les deux premiers sommets de ρ . Ces sommets sont différents et on a des chemins de C_1 vers C_2 et de C_2 vers C_1 . Soient $s_1 \in C_1$ et $s_2 \in C_2$. Par la question précédente on a un chemin de s_1 à s_2 et un chemin de s_2 à s_1 , et ainsi s_1 et s_2 sont dans la même composante fortement connexe. Contradiction. Par l'absurde on a démontré que le graphe des composante est acyclique.

Exercice 5

1. Montrons que E est une relation d'équivalence.

- Réflexivité : Pour tout $x \in A$, on a $R(x, x)$, donc $E(x, x)$.
- Symétrie : Soient $x, y \in A$. On suppose $E(x, y)$, montrons que $E(y, x)$. On a $E(x, y) \iff R(x, y) \wedge R(y, x) \iff E(y, x)$.
- Transitivité : Soient $x, y, z \in A$. On suppose $E(x, y)$ et $E(y, z)$, on montre que $E(x, z)$. On a $E(x, y)$ donc $R(x, y)$ et $R(y, x)$. On a également $E(y, z)$ donc $R(y, z)$ et $R(z, y)$. Par transitivité de R , on a $R(x, z)$ et $R(z, x)$, donc $E(x, z)$.

Montrons que pour tout $X \in A/E$, on a $\forall x, y \in X, R(x, y)$. Soit $X \in A/E$. Soient $x, y \in X$, on a $E(x, y)$, donc en particulier $R(x, y)$.

2. La relation E est la restriction de R à sa partie symétrique, on a donc :

$E = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a)\}$. Les classes d'équivalence sont donc $\{a, b\}$, $\{c\}$ et $\{d\}$.

3. On a pour $X, Y \in A/E$, $RE(X, Y) \iff \exists x \in X, \exists y \in Y, R(x, y)$.

- (a) Montrons que $RE(X, Y) \forall x \in X, \forall y \in Y, R(x, y)$. Soient $X, Y \in A/E$, on suppose $RE(X, Y)$. Par définition de RE on sait qu'il existe x et y telles que $x \in X, y \in Y$ et $R(x, y)$. Soient $s \in X$ et $t \in Y$, montrons que $R(s, t)$.

On a $s, x \in X$ donc $R(s, x)$, on a $y, t \in Y$ donc $R(y, t)$, et on sait que $R(x, y)$, donc par transitivité de R , on a $R(s, t)$. L'autre sens est évident.

- (b) Montrons que RE est une relation d'ordre sur A/E .

- Réflexivité : Soit $X \in A/E$, pour tout $x \in X, R(x, x)$ donc $RE(X, X)$.
- Anti-symétrie : Soient $X, Y \in A/E$. On suppose que $RE(X, Y)$ et $RE(Y, X)$, montrons que $X = Y$. On a $RE(X, Y)$ donc pour tout $x \in X, y \in Y, R(x, y)$. On a $RE(Y, X)$ donc pour tout $y \in Y, x \in X, R(y, x)$. Donc pour tout $x \in X, y \in Y, R(x, y) \wedge R(y, x)$, d'où $E(x, y)$ et X et Y sont la même classe d'équivalence.
- Transitivité : Soient $X, Y, Z \in A/E$. On suppose que $RE(X, Y)$ et $RE(Y, Z)$. Montrons que $RE(X, Z)$. On a $RE(X, Y)$ donc pour tout $x \in X, y \in Y, R(x, y)$. On a $RE(Y, Z)$ donc pour tout $y \in Y, z \in Z, R(y, z)$. Donc pour tout $x \in X, z \in Z, R(x, z)$ par transitivité de R , d'où $RE(X, Z)$.

- (c) Sur l'exemple précédent, on a $RE(\{a, b\}, \{a, b\}), RE(\{c\}, \{c\}), RE(\{d\}, \{d\})$ et $RE(\{a, b\}, \{c\})$.