Outils logiques et algorithmiques – TD 4 – Correction

Exercice 1

1. Vrai : FEABCG.
2. Faux, à cause de l'orientation.
3. Faux, à cause de l'orientation toujours.
4. Vrai : le chemin vide.

Exercice 2

1. HC_0 : point, HC_1 : segment, HC_2 : carré, HC_3 : cube.
2. Sommets : 2^n, degré de chaque sommet : n, on en déduit un nombre d'arêtes $n2^n/2 = n2^{n-1}$.
3. Circuit : le carré lui-même.
4. Supposons un circuit de la forme $a_1 \dots a_n \longrightarrow \dots \longrightarrow b_1 \dots b_n \longrightarrow a_1 \dots a_n$. On peut le reproduire pour le sous-graphe de HC_{n+1} dans lequel la $n+1$ème dimension vaut 0, et une fois (en sens inverse) pour le sous-graphe de HC_{n+1} dans lequel la $n+1$ème dimension vaut 1. On obtient alors circuit le circuit hamiltonien $a_1 \dots a_n 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow b_1 \dots b_n 0 \longrightarrow b_1 \dots b_n 1 \longrightarrow \dots \longrightarrow a_1 \dots a_n 1 \longrightarrow a_1 \dots a_n 0$.
5. .

Exercice 3

1. Selon le train sélectionné à une étape donnée on a l'une des situations suivantes : le nombre de train et le nombre de wagons diminuent de un, ou le nombre de train augmente de un pendant que le nombre de wagons reste stable. Dans ce dernier cas, un train a disparu pour laisser la place à deux trains plus petits. Rien de tout cela ne donne directement d'ordre décroissant. (on pourrait prendre un ordre lexicographique sur un tableau comptant le nombre de trains de chaque taille, par tailles décroissantes ; on peut généraliser l'idée avec un ordre multi-ensemble, mais ce n'est pas au programme du cours)
2. Les arêtes représentent les liaisons entre deux wagons. À chaque étape, soit le nombre de sommets soit le nombre d'arêtes diminue de un. On a donc une justification directe avec un ordre produit, ou un ordre sur la somme.

Exercice 4 La différence avec le programme donné en cours est à la ligne 7 (dans le cours on avait `lo = mid+1`). Cette modification va mettre en défaut la décroissance du variant dans les cas où `lo` et `mid` sont égaux, ce qui advient lorsque `hi = lo + 1`. Pour trouver ce problème il suffit de chercher `2` dans le tableau `{1}` (une recherche de `0` ou `1` en revanche aboutirait sans encombre).

Exercice 5

1. Soient deux sommets s et s' dans G. Si G' est une couverture connexe de G alors il existe un chemin $s \longrightarrow^* s'$ dans G'. Or les arêtes de G' sont présentes dans G et le chemin $s \longrightarrow^* s'$ existe donc bien dans G.
2. S'il existait un cycle, on pourrait en retirer une arête quelconque pour obtenir une couverture plus petite sans casser la connexité.
3. Un triangle équilatéral.
4. Soit une couverture connexe G' contenant a. Si G' contient tout le cycle ρ alors G' n'est pas minimale. Sinon, il existe une arête a' de ρ qui n'est pas dans G'. On vérifie que le graphe $G'' = (G' \setminus \{a\}) \cup \{a'\}$ est une couverture connexe de G : soient s et s' deux sommets, par hypothèse il existe un chemin $s \longrightarrow^* s'$ dans G'. Si ce chemin n'emprunte pas l'arête a alors il existe également dans G''. Sinon on le décompose en $s \longrightarrow^* s_1 \xrightarrow{a} s_2 \longrightarrow^* s'$. Par hypothèse on a également des chemins $s_1 \longrightarrow^* s_3$ et $s_4 \longrightarrow^* s_2$ avec s_3 et s_4 les extrémités de a'. On peut faire en sorte que ces chemins ne passent pas par a. On relie alors s et s' dans G'' en combinant ces chemins avec a'.

5. Supposons avoir deux couvertures connexes minimales différentes G_1' et G_2'. On regarde la plus petite arête présente dans l'une et pas dans l'autre. On note a cette arête et on suppose $a \in G_1'$. G_2' étant une couverture connexe, on a un chemin $s \longrightarrow^* s'$ dans G_2' reliant les deux extrémités de a, et donc un cycle $s \longrightarrow^* s' \xrightarrow{a} s$ dans G. L'arête a n'est pas l'arête de longueur maximale de ce cycle (sinon, le cycle serait intégralement présent dans G_1'). Donc l'arête maximale du cycle est dans G_2', qui par la question précédente n'est pas une couverture minimale.
6. On garde dans l'arbre couvrant : 2, 3, 4, 5, 6, 9.
7. Deux éléments principaux : le tri initial des arêtes, puis la gestion des composantes connexes. Un bon tri a une complexité $n\log(n)$ pour un ensemble de n éléments (ici les arêtes). Le suivi des composantes connexes est quasi-linéaire en le nombre de sommets avec *union-find*.
8. On prend le graphe complet dont les sommets sont les points de E, et où la longueur d'une arête est la distance euclidienne entre ses extrémités. Le nombre d'arêtes est donc quadratique en le nombre de points de E. L'objectif est de trouver un cycle passant par tous les sommets. On n'a pas imposé que le cycle soit hamiltonien (on a le droit de passer plusieurs fois par un sommet donné).
9. Une tournée est un chemin passant par tous les sommets, il s'agit donc d'une couverture connexe. En outre elle n'est pas minimale car elle est un cycle.
10. Partant de n'importe quel sommet, un parcours en profondeur de l'arbre couvrant minimal passe par tous les sommets du graphe (c'est donc une tournée) en empruntant deux fois chaque arête de l'arbre (d'où la longueur double de la somme des longueurs des arêtes de l'arbre couvrant).