Outils logiques et algorithmiques – TD 3 – Correction

Exercice 1

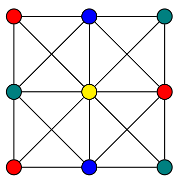
1. La somme des degrés est égale à $2k$. Preuve par récurrence sur le nombre d'arêtes, chaque arête contribuant pour 2 à la somme.
2. $\Delta \leq 2k$ car Δ est inférieur à la somme des degrés, qui vaut $2k$. Exemple : les k arêtes sont des boucles sur un unique sommet.
3. (a) Borne $n(n-1)/2$, atteinte pour un graphe complet.
   (b) Chaque sommet a au plus $n-1$ arêtes incidentes, chacune vers un sommet différent parmi les $n-1$ autres sommets. Exemples : clique, étoile.

Exercice 2

1.
2. On a $n(n-1)/2$ arêtes.
3. Il faut n couleurs, une pour chaque sommet. En effet un tel coloriage satisfait les contraintes. Si on avait un coloriage avec moins de couleurs, alors on aurait dans le graphe deux sommets différents avec la même couleur ; or ces deux sommets sont reliés par une arête, le coloriage ne serait donc pas valide.
4.
5. Le graphe K_5 n'est pas planaire. En effet, s'il était planaire on pourrait le colorier avec 4 couleurs ; or on a vu qu'il en fallait 5.

Exercice 3

1. Chaque émetteur est représenté par un sommet, on a une arête entre deux sommets lorsque les deux émetteurs correspondants sont à une distance inférieure ou égale au seuil N (et donc lorsqu'il existe une zone où ces émetteurs interfèrent). Chaque couleur correspond à une fréquence.
2. (a)
   (b) Degré maximal 8 pour le sommet central.
   (c) Le graphe contient des cliques à 4 éléments, on ne peut donc pas faire moins que 4 couleurs. En outre, le graphe est planaire, donc 4 couleurs doivent suffire.
   (d)



Exercice 4

1. Étoile à six branches.
2. Clique K_4.
3. Le cycle à 5 sommets dessine un pentagone, et le cycle à 6 sommets un hexagone. Si le nombre total est pair, on donne la couleur c_0 aux sommets s_{2k} et la couleur c_1 aux sommets s_{2k+1}. La couleur de s_{i+1} est donc toujours bien différente de celle de s_i. En outre, s_0 et s_{n-1} ont des couleurs différentes, puisque $n-1$ est pair.

   Réciproque : supposons que n est impair, et qu'il existe un coloriage à deux couleurs. Appelons c_0 la couleur donnée à s_0, et c_1 l'autre couleur. Alors nécessairement s_1 a la couleur c_1, et s_2 a la couleur c_0, et s_3 la couleur c_1. Par récurrence : tous les sommets de numéro pair ont nécessairement la couleur c_0 et tous les sommest de numéro impair ont nécessairement la couleur c_1. Donc, avec n impair, s_{n-1} a la couleur c_0. Cela contredit la présence d'une arête entre s_{n-1} et s_0.

4. Preuve par récurrence sur n.
   - Un graphe sans sommet a un degré max 0 et peut être coloré avec 0 couleurs (variante : un graphe avec un sommet a un degré max 0 et peut être coloré avec 1 couleur).
   - Supposons que tout graphe G à n sommets puisse être coloré avec $\Delta(G) + 1$ couleurs. Soit G un graphe à $n + 1$ sommets. Soit s un sommet de G, on considère $G' = G \setminus \{s\}$ (le graphe G privé du sommet s et de ses arêtes incidentes). Le graphe G' a n sommets et un degré maximal $\Delta(G') \leq \Delta(G)$ (à démontrer). Par hypothèse de récurrence G' peut être coloré sans utiliser plus de $\Delta(G') + 1$ couleurs, donc pas plus que $\Delta(G) + 1$ couleurs.

     Dans G, on donne à tous les sommets sauf s la couleur obtenue dans G'. Le sommet s a au maximum $\Delta(G)$ voisins, donc au maximum $\Delta(G)$ couleurs représentées dans ses voisins, donc avec $\Delta(G) + 1$ couleurs on est certain de pouvoir le colorer.
5. On prend comme graphe la ligne $s_0 - s_1 - s_2 - s_3$. Si on colorie en premier s_0 et s_3, ils prendront tous deux la couleur minimale c_0. Le premier colorié parmi s_1 et s_2 prendra alors la couleur c_1, et le deuxième la couleur c_2, soit trois couleurs au total alors que deux auraient suffi.

Exercice 5

1. Deux arêtes incidentes à un même sommet doivent avoir des couleurs différentes.
2. Le degré maximal d'un sommet est une borne inférieure : si on utilise moins de couleurs alors au moins deux arêtes d'un sommet de degré maximal ont la même couleur.
3. (a) C'est une clique, à $n(n - 1)/2$ arêtes.
   (b) Au maximum $n/2$ matchs en même temps. Si on a $k > n/2$ matchs simultanés, alors les k arêtes sont incidentes à $2 * k > n$ sommets, et un sommet a au moins deux arêtes incidentes.
   (c) 3 couleurs pour $n = 4$, 5 pour $n = 5$.